UNIVERSIDAD DE SEVILLA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS.

Fernando Cañizares Romero

Topologías, Relaciones Binarias y (Di)Grafos.

TUTORES:
Rafael Ayala Gómez.
José Antonio Vilches Alarcón.

21 de junio de 2019

Dedicado a mi tía Mercedes y a mi abuelo Rafael, dos personas muy importantes para mi y mi familia, que desgraciadamente nos dejaron durante el transcurso de mi carrera en el grado.

Agradecimientos

Agradecer a mis familiares y amigos el haberme apoyado y aplaudido todo el tiempo y esfuerzo que he dedicado hasta llegar aquí. En especial a Sara, Dani, José, Paula, Rafa y Antonio que son las personas que han estado más cerca de mi combatiendo los exámenes. Agradecer a Luis Miguel Cobo Gutiérrez su ayuda a la hora de editar este trabajo y por haber impulsado notablemente mis conocimientos de LaTeX.

Agradecer de forma especial a mi tutor Rafael Ayala Gómez, por haberme regalado su tiempo para hacer este maravilloso trabajo, el cual he disfrutado desde el principio hasta el final, por haberme enseñado matemáticas desde el primer curso del grado y por las risas que nos hemos echado entre las cuatro paredes de su despacho.

Introducción

El propósito de este trabajo, es presentar una introducción a los vínculos que existen entre ciertas estructuras de la matemática discreta, como las relaciones de orden u los digrafos, con la topología en general. Es sabido que todo digrafo puede considerar como una representación geométrica de una relación binaria, y que las propiedades de ésta quedan reflejadas en las características de sus aristas (existencia de bucles, orientación, aristas paralelas, etc...). Así, por ejemplo, si la relación es de orden, aparecerá un bucle en cada vértice, un par de aristas en sentidos opuestos entre cada par de vértices, una arista entre los vértices inicial y final de dos aristas consecutivas, etc.

Por otra parte, Alexandroff introdujo en 1937 un tipo de espacios topológicos, que llamó .espacios discretos", caracterizados de forma que cada punto del espacio admita un entorno mínimo. Dichos espacios, llamados actualmente espacios de Alexandroff o A-espacios, presentan la propiedad característica de que están en biyección con las relaciones de (pre)orden, y aquellos que satisfagan el axioma T_0, lo están con las relaciones de orden parcial. Evidentemente dicho axioma es el único que tiene sentido considerar sobre dichos espacios, pues una A-topología que sea T_1 es la discreta.

Una clase importante de A-espacios son los espacios finitos, que en las últimas décadas han ganado especial importancia en la teoría de homotopía de complejos celulares, y en la topología digital. Siendo precisamente su interpretación como conjuntos ordenados lo que destacados autores de dichos campos señalan como razón principal, pues esa vinculación entre topología y orden hace posible la mutua influencia entre ambos mundos, el topológico y el algebraico, la traducción de conceptos y propiedades topológicas a términos y enunciados de la teoría de retículos.

Pero puesto que los espacios finitos son relaciones de (pre)orden, y éstas son grafos, teniendo en cuenta su diagrama de Hasse asociado, se tiene así que la clase de los espacios finitos es equivalente a la clase de los grafos dirigidos (ver [29]), lo que pone de manifiesto que ambas categorías son de cierta forma equivalentes. Una topología sobre un conjunto finito es un grafo dirigido, y una aplicación continua entre espacios finitos es un homeomorfismo entre los correspondientes grafos.

Aparte de la vinculación estructural señalada, hay otra cuestión en la que se observa una clara e interesante relación entre los grafos y la topología, aparte, claro está , de la que se tiene cuando se deja de considerar un grafo como un objeto conjuntista o combinatorio. Y a través de su representación en el plano o en el espacio, pasamos a considerarlo como un objeto geométrico. En ese momento surgen los problemas de la planaridad, superficie más sencilla en la que se puede sumergir, etc. La cuestion a que nos referimos se plantea en cuanto se empieza el estudio de los grafos, y tiene que ver con la idea de conexión que se define; ¿qué relación existe entre la conexión de un grafo y el concepto de conexión en un espacio topológico?. La distancia geodésica produce la topología discreta en el conjunto de vértices de un grafo, luego se plantea el problema de si es posible definir una topología en el conjunto de vértices, de forma que sus subconjuntos conexos sean los mismos que los subgrafos conexos inducidos por sus elementos. Este problema fue resuelto en [9] para ciertos grafos localmente finitos, y en [28] se extendió la solución a grafos infinitos más generales. Finalmente, en [**?**], se probó que la caracterización obtenida en [9] es válida para cualquier grafo.

Señalamos por último que la inclusión en este trabajo de los capítulos dedicados a las propiedades topológicas de los A-espacios, están relacionadas únicamente con la Topología General y ajenas a la Teoría de Homotopía o a la Topología Digital. Es necesaria para presentar de forma completa y detallada el Capírulo seis los resultados de [9] y [20] que hemos citado.

En cuanto a la estructura presentada, señalamos que está dividida en seis capítulos. En los dos primeros se exponen un breve resumen de los resultados de topología, relaciones de orden y teoría de grafos que se usan a lo largo del trabajo. Los capítulos tercero y cuarto están dedicados a las propiedades de topología general de los A-espacios (bases mínimas, conexión, compacidad...), incluyendo en el cuarto aquellas más directamente ligadas a su orden de especialización. En el Capítulo quinto se recogen algunas propiedades específicas de los espacios finitos (número de topologías sobre un conjunto finito, caracterización de las aplicaciones continuas entre ellos, matrices que reflejan las propiedades topológicas esenciales).

Por último, en el Capítulo seis, se indican dos topologías definidas recientemente sobre los vértices de un grafo (ver [15, 24]), y se exponen los resultados de [?], así como algunos ejemplos que ponen de manifiesto cómo las topologías que se pueden definir sobre un grafo compatibles con sus propiedades de conexión, están relacionadas con la estructura del grafo.

Abstract

The main goal of this Final Degree Proyect consists on stablishing links between binary relation, order relations and graph theory unther a topological point of view . Alexandroff spaces will play a key role through all the manuscript. Main results on compatible topology on graph, are considered.

Índice general

Nociones Básicas de Topología. 1

1.1. Algunas definiciones previas.

Definición 1.1.1. Un espacio topológico es un par $(X, \mathcal{T})$, donde X es un conjunto y $\mathcal{T}$ una familia de subconjuntos de X, llamada topología sobre X y cuyos elementos son llamados abiertos DE $\mathcal{T}$, verificándose las siguientes propiedades:

1. El conjunto vacío $\emptyset$ y el propio X son abiertos.
2. La intersección de cualquier cantidad finita de abiertos es un abierto.
3. La unión de cualquier cantidad de abiertos es un abierto.

Los conjuntos cerrados son los complementarios de los conjuntos abiertos y:

$$F = \{A^c;\ A \in \mathcal{T}\}.$$

Con A^c el complementario de A en X.

Definición 1.1.2. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$. Se dice que x es un punto adherente a A si todo abierto de $\mathcal{T}$ que contenga a x corta a A. El conjunto de los puntos adherentes a A se llama clausura de A y se denota por $\overline{A}$. Si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$, x se llama punto de acumulación de A. El conjunto A' formado por los puntos de acumulación de A se llama derivado de A. Se dice que x es un punto interior de A si hay algún abierto que contenga a x contenido en A. El conjunto de los puntos interiores de A se llama el Interior de A y se denota por $\text{int}(A)$.

Definición 1.1.3. Otra forma habitual de obtener una topología sobre un conjunto es a través del llamado operador clausura (Kuratowski) que es una aplicación, $\gamma : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. $\gamma(\emptyset) = \emptyset$.

2. $A \subset \gamma(A)$.

3. $\gamma(\gamma(A)) = \gamma(A)$.

4. $\gamma(A \cup B) = \gamma(A) \cup \gamma(B)$.

   Se prueba que la familia

   $$\mathcal{T}_\gamma = \{A \subset X;\, X \setminus A = \gamma(X \setminus A)\}$$

   es una topología sobre X llamada topología asociada a γ cuyos cerrados son los conjuntos $A \subset X$ tales que $\gamma(A) = A$.

Definición 1.1.4. Se dirá que un subconjunto N de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es entorno del punto $x \in X$ si existe un abierto U verificando que $x \in U \subset N$. El conjunto de entornos de un punto $x \in X$ se denotará por $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$.

Las propiedades fundamentales de los entornos son las siguientes

Proposición 1.1.5. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$:

1. $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \neq \emptyset$.

2. $x \in U$, para todo $U \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$.

3. Si $U \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ y $U \subset V \subset X$ entonces V es un entorno de x.

4. Si $U_1, U_2 \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, entonces $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$.

5. Para todo $U \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, existe un $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ tal que $V \subset U$ y $V \in \mathcal{N}_y^{\mathcal{T}}$ para todo $y \in V$.

Una consecuencia directa es que, un subconjunto $A \subset X$ es abierto si y sólo si es entorno de todos sus puntos.

Definición 1.1.6. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, se dice que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ es base de abiertos de $\mathcal{T}$ si todo elemento de $\mathcal{T}$ se puede poner como unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Sea $\mathcal{B}$ una familia de abiertos de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Entonces, $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$ si y sólo si para todo $A \in \mathcal{T}$ y para todo $x \in A$ existe $\mathcal{B}_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathcal{B}_x \subset A$.

Si $\mathcal{B}$ es una base de abiertos en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, también se dirá que $\mathcal{B}$ es una base de la topología $\mathcal{T}$.

Definición 1.1.7. El conjunto de bases para una topología $\mathcal{T}$ es un conjunto parcialmente ordenado bajo la relación de inclusión, y un elemento minimal respecto a dicha relación se llama base minimal de la topología $\mathcal{T}$, es decir, que no existe otra base de $\mathcal{T}$ que esté propiamente incluida.

Nota 1.1.8. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico finito. Para $x \in X$ definimos $\mathcal{U}_x = \bigcap\{A \subseteq X : A \text{ es abierto y } x \in A\}$. Se verifica que $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_x\}_{x \in X}$ es una base minimal de $\mathcal{T}$.

Proposición 1.1.9. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases para las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, respectivamente, sobre X. Entonces son equivalentes:

1. $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.
2. *a)* Si $B \in \mathcal{B}$ y $x \in B$, existe $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subset \mathcal{B}$.

   b) Si $B' \in \mathcal{B}'$ y $x \in B'$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset \mathcal{B}'$.

Definición 1.1.10. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio. Una subbase para la topología $\mathcal{T}$ es una subcolección $D \subseteq \mathcal{T}$ con la propiedad que la familia formada por las intersecciones finitas de elementos de D es una base para T.

Ejemplo 1.1.11.
$X = \{a, b, c\}$ y $T = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$. Luego:

$\mathcal{U}_a = \{a\} \bigcap \{a, b\} \bigcap \{a, c\} \bigcap X = \{a\}$

$\mathcal{U}_b = \{a, b\} \bigcap X = \{a, b\}$

$\mathcal{U}_c = \{a, c\} \bigcap X = \{a, c\}$

Definición 1.1.12. $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, y $A \subseteq X$, se define la topología relativa sobre A como $\mathcal{T}_A = \{A \cap U : U \in \mathcal{T}\}$.

Proposición 1.1.13. Si $\mathcal{B}$ es una base para $(X, \mathcal{T})$, entonces

$$\mathcal{B}_A = \{A \cap B : B \in \mathcal{B}\}$$

es una base para el subespacio $(A, \mathcal{T}_A)$.

Proposición 1.1.14. Dado un conjunto X. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una base para una topología en X si y solo si cumple que

1. $X = \bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\}$, es decir, $\mathcal{B}$ es un recubrimiento de X.

2. Dados $U, V \in \mathcal{B}$ y $x \in U \cap V$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U \cap V$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$.

Dicha topología se llama topología generada por $\mathcal{B}$, y se denota por $\mathcal{T}(\mathcal{B})$.

Nótese que, en particular un recubrimiento $\mathcal{B} \in \mathcal{P}(X)$ cerrado para intersecciones finitas es una base.

Definición 1.1.15. Sea $\{X_i, \mathcal{T}_i\}$, una familia arbitraria de espacios topológicos. Su producto cartesiano es el conjunto

$$X = \prod_{i \in I} X_i = \{f : I \longrightarrow \cup X_i : f(i) = x_i, x_i \in X_i\}$$

El elemento x_i se suele llamar coordenada i-ésima y se suele denotar en el caso de un conjunto finito de indicies por $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ con $0 \leqslant i \leqslant n$. La aplicación dada por $p_i : \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_i$ dada por $p_i(x) = x_i$, se llama i-ésima proyección sobre el factor X_i.

Podemos dotar a X de la topología producto, denotada $*_{i \in I}\mathcal{T}_i$, que es aquella que tiene como subbase los conjuntos de la forma $\{p_i^{-1}(U_i)\}$ donde $U_i \in \mathcal{T}_i$. La topología producto tiene como base los conjuntos de la forma $\prod_{i \in J} U_i$ tales que existe un subconjunto finito $J \subset I$ con $U_i = X_i$ si $i \in I \setminus J$ y $U_i \in \mathcal{T}_i$, un abierto, si $i \in J$.

En el caso de tener el producto de dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ la topología producto la denotaremos por $\mathcal{T} * \mathcal{T}'$.

Definición 1.1.16. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X. El cociente $Y = X/\sim$ de clases de equivalencia.

Se define la topología cociente, $\mathcal{T}/\sim$

$$\mathcal{T}/\sim = \{V \subseteq X/\sim\colon\ q^{-1}(V) \text{ es un abierto de } X\}$$

donde $q : X \longrightarrow X/\sim$ es la aplicación cociente, definida por $q(x) = [x]$.

El siguiente resultado, cuya demostración es inmediata, que establece la relación entre las bases de abiertos y las bases de entornos de una topología. Donde a partir de una base de la topología se obtiene una base de entornos abiertos para cada punto y viceversa.

Proposición 1.1.17. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$:

1. Si $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$ y $x \in X$, entonces $\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ es una base de entornos abiertos de x.

2. Si para cada punto $x \in X$ se tiene una base de entornos abiertos $\beta(x)$, entonces $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \beta(x)$ es una base de $\mathcal{T}$.

Definición 1.1.18. Una distancia (o métrica) sobre un conjunto X es una aplicación $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ verificando las siguientes propiedades:

1. $d(x, y) \geqslant 0$, para todos $x, y \in X$.

2. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

3. $d(x, y) = d(y, x)$, para todos $x, y \in X$.

4. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$, para todos $x, y, z \in X$ (Desigualdad triangular).

Un conjunto X sobre el cual hay definida un distancia d se denomina espacio métrico, y se denota por (X, d).

Si la condición 2. se cambia por $d(x, x) = 0$, entonces d es una psudodistancia, y el par (X, d) se llama espacio psudométrico.

Si (X, d) es un espacio pseudométrico, $\mathcal{T}_d = \{A \subset X :$ para todo $x \in A$ existe $B(x, r) \subset A\}$ se llamala topología métrica y por definición una base de esta topología es $\{B_d(x, r) : x \in X, r > 0$.

Definición 1.1.19. Un espacio $(X, \mathcal{T})$ es segundo numerable si $\mathcal{T}$ admite una base numerable $\mathcal{B}$.

Definición 1.1.20. Un espacio se dice separable si existe un subconjunto denso y numerable.

Los espacios segundo numerables son siempre separables, y estas dos nociones son equivalentes para espacios métricos.

Definición 1.1.21. Se dice que una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es continua en un punto $x \in X$ si para todo $U \in \mathcal{N}_{f(x)}^{\mathcal{T}'}$ existe $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ tal que $f(V) \subset U$.

Si $\mathcal{B}_x^{\mathcal{T}}$ y $\mathcal{B}_{f(x)}^{\mathcal{T}'}$ son bases de entornos de x en $\mathcal{T}$ y de $f(x)$ en $\mathcal{T}'$, respectivamente, entonces f es continua en x si y solo si para todo $U \in \mathcal{B}_{f(x)}^{\mathcal{T}'}$ existe $V \in \mathcal{B}_x^{\mathcal{T}}$ tal que $f(V) \subset U$.

Una función se dice continua si lo es en cada punto $x \in X$.

En el siguiente resultado, cuya demostración puede verse en [14] (página 80). Se indican las condiciones equivalentes para la continuidad de una función.

Teorema 1.1.22. Sean X e Y espacios topológicos, y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. f es continua.

2. La imagen inversa de un cerrado en Y es un cerrado en X.

3. La imagen inversa de un elemento de una subbase (base) para Y es un abierto en X .

4. Para cada $x \in X$ y para cada entorno $N_{f(x)}$ en Y, existe un entorno M_x de X tal que $f(M_x) \subseteq N_{f(x)}$.

5. $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subset X$.

6. $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$ para todo $B \subset Y$.

Definición 1.1.23. Decimos que una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es abierta (cerrada) si la imagen de un subconjunto abierto (cerrado) de $\mathcal{T}$ es un abierto (cerrado) en $\mathcal{T}'$.

Proposición 1.1.24. Dada una aplicación $f : (X_1, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X_2, \mathcal{T}_2)$, son equivalentes:

1. f es cerrada
2. $\overline{f(A)} \subset f(A)$ para todo $A \subset X_1$.

Definición 1.1.25. Decimos que una aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es un homeomorfismo si f es biyectiva, continua y con inversa continua.

Esto es equivalente a decir que f es continua, biyectiva y con inversa abierta (cerrada).

1.1.1. Conexión y Conexión por Caminos.

Definición 1.1.26. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sean $O_1, O_2 \subset X$. Se dice que O_1 y O_2 separan al espacio X si:

1. O_1 y O_2 son no vacíos.
2. $O_1 \cap O_2 = \emptyset$
3. $O_1 \cup O_2 = X$

Definición 1.1.27. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, se dice conexo si no existen subconjuntos propios de X O_1 y O_2 abiertos tales que separen a X. Un subconjunto $A \subset X$ es conexo si $(A, \mathcal{T}_A)$ lo es.

La componente conexa $C(x)$ de x es el mayor subconjunto conexo de X que contiene a x, y se verifica que la familia $\{C(x) : x \in X\}$ es una partición X formada por conjuntos cerrados.

Si $(X, \mathcal{T})$ no es conexo, se dice que X es disconexo, y se dice totalmente disconexo si $C(x) = \{x\}$ para todo $x \in X$.

Ejemplo 1.1.28.
Los siguientes espacios son conexos:

1. El espacio de Sierpinski. $(X, \mathcal{T})$ con $X = \{a, b\}$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$

2. $\mathbb{R}^n$ con la topología euclidea.

3. Cualquier conjunto con la topología discreta es totalmente disconexo.

4. Cualquier conjunto con la topología discreta es localmente conexo.

Definición 1.1.29. Un espacio topológico X se dice localmente conexo si todo punto admite una base de entornos abiertos formada por conjuntos conexos.

Ejemplo 1.1.30.

1. Cada intervalo en la recta real usual es localmente conexo.

2. Los espacios euclideos son localmente conexo.

3. $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son totalmente disconexos.

Definición 1.1.31.

1. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ un camino de x a y en X, es una aplicación continua $f : I = [0, 1] \longrightarrow X$ con I dotado de la topología euclídea, verificándose que $f(0) = x$ y $f(1) = y$, x se llama punto inicial y y se llama punto final del camino f.

2. Un espacio topológico X se dice conexo por caminos si para cada $x, y \in X$ existe un camino en X que une x e y.

Definición 1.1.32. Un espacio topológico X se dice localmente conexo por caminos si todo punto admite una base de entornos abiertos formada por conjuntos conexos por caminos.

Proposición 1.1.33. Todo espacio X conexo y localmente conexo por caminos, es conexo por caminos.

1.1.2. Compacidad.

Definición 1.1.34. Una familia $A = \{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X se dice que es un recubrimiento de X si $X = \bigcup_{i \in I} A_i$. Se dice que $\mathcal{A}$ es un recubrimiento abierto de X si es un recubrimiento de X formado por abiertos.

Definición 1.1.35. Un espacio $(X, \mathcal{T})$ se dice que es compacto, si todo recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X admite una subcolección finita que también recubren a X.

Teorema 1.1.36.

1. La imagen de un espacio compacto bajo una aplicación continua es un espacio compacto.
2. Cada subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.

En cuanto al producto de espacio compactos, se tiene el siguiente resultado, conocido como Teorema de Tychonoff, que fue la razón principal para considerar sobre un producto arbitrario infinito la topología producto dada en la Definición 1.1.15. Su prueba puede encontrarse en [1] (página 138).

Teorema 1.1.37. Si $\{(X_i, \mathcal{T}_i\}_{i \in I}$ es una familia de espacios compactos, entonces $\prod_{i \in I} X_i$ con la topología producto (ver Definición 1.1.15). Es un espacio compacto.

Definición 1.1.38. Un espacio $(X, \mathcal{T})$ es localmente compacto si existe una base de entornos compactos. Es decir, un espacio es localmente compacto si para todo $x \in X$ y para todo abierto U que contiene a x, existe un abierto V y un compacto K tal que $x \in V \subseteq K \subseteq U$.

1.2. Axiomas de Separación, T_0, T_1 y T_2.

Los espacios T_0 son la forma mas débil de separación entre los puntos de un espacio topológico.

Definición 1.2.1. Un espacio topológico X se dice que es T_0 o de Kolmogorov si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$. o bien existe un entorno U de x tal que $y \notin U$ o bien existe un entorno U de y tal que $x \notin U$ (ver figura 1.1).

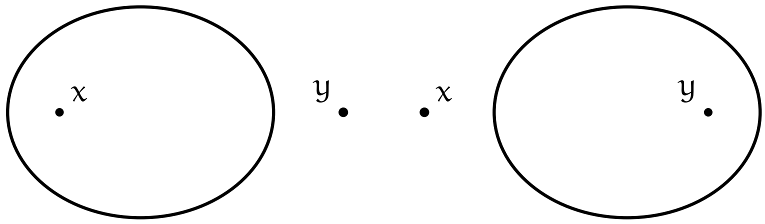


Figura 1.1: *Axioma de separación* T_0.

Es inmediato comprobar que esta condición es equivalente a la obtenida cambiando entorno por abierto. El siguiente resultado es consecuencia inmediata de la definición.

Ejemplo 1.2.2.

1. Si X tiene más de un punto y $\mathcal{T}$ es la topología indiscreta, $(X, \mathcal{T})$ no es T_0.

2. Si $X = \{a, b\}$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, $(X, \mathcal{T})$ es T_0.

3. Si sobre $\mathbb{R}^2$ se considera la psudometrica $d_v((x, y), (x', y')) = |x - x'|$, entonces $(\mathbb{R}, d_v)$ no es T_0. En efecto, una base de dicho espacio son las bandas verticales abiertas, y como se observa en la figura 1.2, todo abierto básico que contenga al punto a, también contiene al punto b.

   En general, ningún espacio psudométrico es T_0.

En la Proposición 1.2.3 se indican formas equivalentes de entender la propiedad de separación T_0.

Proposición 1.2.3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $(X, \mathcal{T})$ es T_0.

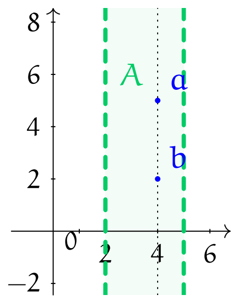


Figura 1.2: *Bandas verticales abiertas.*

2. Para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, se verifica que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

3. Para todo $x \in X$, el conjunto derivado $\{x\}'$ es unión de conjuntos cerrados.

Demostración. Veamos en primer lugar que 1) $\Rightarrow$ 2). Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Se tiene, por hipótesis, que existe un entorno $\mathcal{V}_x$ de x con $y \notin \mathcal{V}_x$ o un entorno $\mathcal{V}_y$ de y con $x \notin \mathcal{V}_y$. Así, $x \notin \overline{\{y\}}$ o $y \notin \overline{\{x\}}$. Por tanto, $\overline{\{y\}} \neq \overline{\{x\}}$.

Para probar 2) $\Rightarrow$ 3), veamos que $\{x\}' = \bigcup\{\overline{\{y\}};\ \ y \in \overline{\{x\}},\ y \neq x\}$.

Si $y \in \overline{\{x\}} - \{x\}$ se tiene que $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$ y como $x \neq y$ se verifica, por hipótesis 2), que $x \notin \overline{\{y\}}$. Así, $\overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}} - \{x\} = \{x\}'$. Por tanto $\{x\}' \subseteq \bigcup\{\overline{\{y\}};\ \ y \in \overline{\{x\}},\ y \neq x\}$. La otra inclusión es evidente.

Por último veamos 3) $\Rightarrow$ 1). Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces, $y \notin \{x\}'$ o $y \in \{x\}'$. Por 3) se tiene que $\{x\}' = \bigcup_{i \in I} \mathcal{C}_i$, donde $\mathcal{C}_i$ es un cerrado para todo $i \in I$. Luego, si $y \notin \{x\}'$, por definición de clausura $y \notin \overline{\{x\}}$, por tanto $X - \overline{\{x\}}$ es un entorno de y que no contiene a x.

Si $y \in \{x\}'$, existe $i \in I$ con $y \in \mathcal{C}_i \subseteq \{x\}'$. Por tanto, $X - \mathcal{C}_i$ es un entorno de x que no contiene a y. ■

Definición 1.2.4. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es T_1 si para cualquier dos puntos distintos de X, existen entornos de cada uno de los puntos que no contienen al otro (ver figura 1.3).

Es fácil comprobar que las siguientes condiciones son equivalentes.

Proposición 1.2.5. Dado un espacio $(X, \mathcal{T})$ las siguientes condiciones son equivalentes.

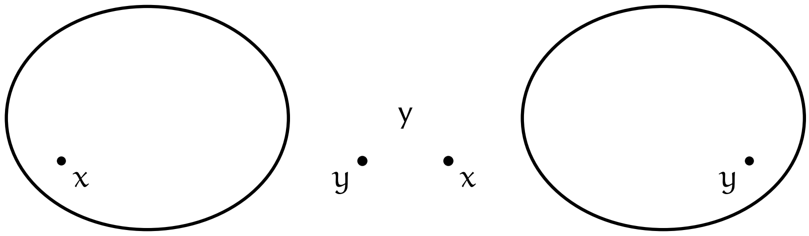


Figura 1.3: *Axioma de separación* T_1.

1. X es T_1.
2. $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$.
3. $\{x\} = \cap\{\mathcal{N};\ \mathcal{N} \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}\}$.
4. $\bigcap\{U \in \mathcal{T} :\ x \in U\} = \{x\}$.

Nótese que dicho resultado es consecuencia inmediata de la definición, pues en un espacio T_1 dados dos puntos distintos existen entornos (abiertos) que contienen a uno, pero no contienen a otro.

Definición 1.2.6. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es T_2 o Hausdorff si para cualquier par de puntos x, y de X con $x \neq y$ existen entornos $\mathcal{U}_x$ de x y $\mathcal{U}_y$ de y tal que $\mathcal{U}_x \bigcap \mathcal{U}_y = \emptyset$, (ver figura 1.4)

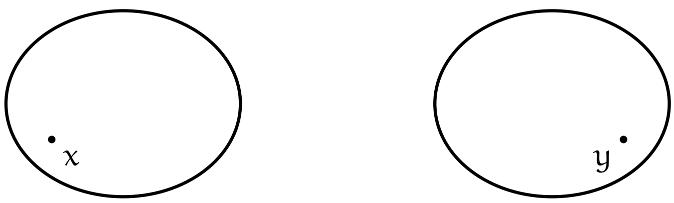


Figura 1.4: *Axioma de separación* T_2.

Proposición 1.2.7.

1. Sea $M = (X, d)$ un espacio métrico. Entonces M es un espacio de Hausdorff.
2. Sea $M = (X, d)$ un espacio pseudométrico y sea $(X, \mathcal{T}_d)$ el espacio topológico sobre X inducido por d. Entonces $(X, \mathcal{T}_d)$ es un espacio métrico si y sólo si es un espacio T_0

Demostración.

1. Sea $x, y \in X$ con $x \neq y$. $d(x,y) = \epsilon > 0$, y las bolas abiertas de radio $\frac{\epsilon}{2}$, $B_\epsilon(x, \frac{\epsilon}{2}) y B_\epsilon(y, \frac{\epsilon}{2})$ son abiertos disjuntos que contienen a x e y respectivamente.

2. Supongamos que (X, d_p) es un espacio métrico. Entones que sea T_0 es consecuencia directa de 1.

   Supongamos ahora que $(X, \mathcal{T}_d)$ es T_0. Sea $a, b \in X, a \neq b$. Entonces existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $(a \in U$ y $b \notin U)$ o $(b \in U$ y $a \notin U)$.

   Supongamos que $a \in U$ y $b \notin U$. Luego, por la definición de la topología $\mathcal{T}_d$ existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(a) \subset U$. Como $b \notin U$, $d(a,b) \geqslant \epsilon$. Y como $\epsilon > 0$, $d(a,b) > 0$ y por tanto $(X, \mathcal{T}_d)$ es un espacio métrico.

■

La propiedad de separación T_0 es hereditaria, lo cual quiere decir que todo subespacio topológico de un espacio T_0 es T_0.

Proposición 1.2.8. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico entonces se verifica la siguiente cadena de implicaciones $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Demostración. En primer lugar veamos que $T_2 \Rightarrow T_1$. Por definición de espacio T_2

$$\forall x, y \in S \text{ con } x \neq y \ \exists U, V \text{ abiertos} \mid x \in U, y \in V, \ U \cap V = \emptyset.$$

Como $U \cap V = \emptyset$ se sigue, por ser disjuntos, que:

$$x \in U \Longrightarrow x \notin V \text{ y } y \in V \Longrightarrow y \notin U$$

Luego si $x \in U, y \in V$ se tiene que:

$$\text{Existe } U \text{ abierto, tal que } x \in U \text{ e } y \notin U,$$

y lo mismo para V, es decir:

$$\text{Existe } V \text{ abierto, tal que } y \in V \text{ y } x \notin V.$$

Veamos ahora que $T_1 \Rightarrow T_0$. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio T_1 y sea $x, y \in X, x \neq y$. Por ser $(X, \mathcal{T})$ un espacio T_1

$$\text{Existe } U \in \mathcal{T} \text{ con } x \in U, y \notin V \text{ y } \exists V \in \mathcal{T} \text{ con } y \in V, x \notin V.$$

Luego existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U, y \notin U$ o existe $V \in \mathcal{T}$ tal que $y \in V, x \notin U$. Por lo que este espacio es T_0.

■

Nota 1.2.9. Ninguna de las implicaciones anteriores se tienen en sentido contrario. Por ejemplo, un espacio que es T_0 pero no T_1 es $(X, \mathcal{T})$ donde $X = \{a, b\}$ y $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ (Sierpinski). Y una que es T_1 pero no T_2 es $\mathbb{R}$ con la topología cofinita, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{A \subseteq \mathbb{R}$; donde $\mathbb{R} \setminus A$ es finito$\}$.

El siguiente Teorema es un resultado interesante, pues muestra que existe una equivalencia en relación con los axiomas de separación que se encuentra en los factores de un producto cartesiano y el mismo producto. Para la prueba del Teorema 1.2.10 ver la página 110-111 de [1].

Teorema 1.2.10. Sea $(X_j, \mathcal{T}_j)_{j \in J}$ una familia de espacios topológicos, entonces $\prod_{j \in J} X_j$ es T_i si y solo si cada uno de sus factores X_j es T_i, con $i = 0, 1, 2$.

Se finaliza el capítulo con el siguiente resultado para espacios T_2 compactos.

Teorema 1.2.11.

1. Todo subespacio compacto de un espacio T_2 es cerrado.

2. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua y biyectiva, y X es compacto e Y es T_2, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración.

1. Sea A un subespacio compacto del espacio T_2, X. Probaremos que $X \setminus A$ es abierto, luego A será cerrado. Sea $x_0 \in X \setminus A$. Vamos a demostrar que existe un entorno de x_0 que

no corta a A. Para cada punto $y \in A$, elijamos entornos disjuntos U_y, V_y de x_0 e Y respectivamente (utilizando la condición de ser T_2). La colección $\{V_y : y \in A\}$ es un recubrimiento de A por abiertos de X, por tanto, podemos recubrir A con un numero finito de estos conjuntos, por ejemplo $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$. El conjunto abierto $V = V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_n}$ contiene a A, y es disjunto del abierto $U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_n}$ que se forma al tomar la intersección de los correspondientes entornos de x_0, ya que si $z \in V$, entonces z pertenece a algún V_{y_i}, $i = 1, \ldots, n$, por tanto $z \notin U_{y_i}$, y así $z \notin U$. Por tanto, U es un entorno de x_0 que no corta a A.

2. Probaremos que las imágenes de conjuntos cerrados de X bajo la aplicación f son también cerrados en Y, con esto, probaremos la continuidad de f^{-1}. Si A es una cerrado en X, entonces A es compacto. Por tanto, el Teorema 1.1.36 nos asegura que $f(A)$ es compacto. Ahora bien, como Y es T_2, por el primer apartado se tiene que $f(A)$ es cerrado en Y.

■

Relaciones Binarias. 2

2.1. Definiciones y Propiedades Básicas.

Definición 2.1.1. Una relación sobre X es un subconjunto $R \subseteq X \times X$ y se escribirá xRy si $(x, y) \in R$.

Definición 2.1.2. Se dice que R es:

1. **Reflexiva** para todo $x \in X$ si xRx.

2. **Simétrica**, si $xRy \Leftrightarrow yRx$.

3. **Antisimétrica**, si xRy e yRx, entonces $x = y$.

4. **Transitiva**, si xRy e yRz, entonces xRz.

Una relación se dice que es una relación de equivalencia si verifica las propiedades, reflexiva, simétrica y transitiva.

En el desarrollo del trabajo jugaran un papel fundamental las relaciones de orden.

Definición 2.1.3. Una relación $\leqslant$ sobre X reflexiva y transitiva se llama preorden y el par $(X, \leqslant)$ conjunto preordenado.

Para cada $x \in X$ los conjuntos $\downarrow x = \{y \in X : y \leqslant x\}$ y $\uparrow x = \{y \in X : y \leqslant x\}$ se llamaran segmento inferior y segmento superior respectivamente. También se suele denotar por $(\leftarrow, x]$ o $(x, \rightarrow]$.

Decimos, que a es un límite inferior de un conjunto $Y \subset X$, y b es un límite superior, si $a \leqslant x$ para todo $x \in Y$, y $x \leqslant b$ para todo $x \in Y$, respectivamente.

Definición 2.1.4. Un orden parcial sobre un conjunto X es una relación transitiva, reflexiva y antisimétrica. Un conjunto parcialmente ordenado, o poset, es un conjunto no vacío X equipado con un orden parcial $\leqslant$.

Decimos que X es un conjunto totalmente ordenado, cadena, o simplemente orden sobre X, si todos los elementos de X se pueden comparar bajo la relación $\leqslant$. Una anticadena es un poset en el que dados $x, y \in X$, $x \leqslant y$ si y solo si $x = y$.

Definición 2.1.5. Si $(X, \leqslant)$ es un conjunto preordenado. Un elemento $x \in X$ es un elemento maximal (minimal) si para cada $z \in X$, $x \leqslant z$ $(z \leqslant x)$ implica que $x = z$. x se llama máximo (mínimo) si para todo $y \in X$, $y \leqslant x$ $(x \leqslant y)$.

Definición 2.1.6. Un conjunto superior (también llamado conjunto creciente) en un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leqslant)$ es un subconjunto A con la propiedad de que, si $x \in A$ y $x \leqslant y$, entonces $y \in A$.

La noción dual es conjunto inferior (alternativamente, conjunto decreciente), que es un subconjunto A con la propiedad de que, si $x \in A$ y $y \leqslant x$, entonces $y \in A$.

Definición 2.1.7. Sea $(X, \leqslant)$ un conjunto preordenado. Para $A \subset X$ y $x \in X$ denotamos:

1. $\downarrow A = \{y \in X : y \leqslant x \text{ para algún } x \in A\}$;.

2. $\uparrow A = \{y \in X : x \leqslant y \text{ para algún } x \in A\}$;.

Obsérvese que el elemento $x \in A$ de la definición anterior depende del elemento y dado.

Nota 2.1.8. Nótese que $\downarrow x = \downarrow \{x\}$ y $\uparrow x = \uparrow \{x\}$ y se verifica que:

1. $\uparrow A = \cup \uparrow x$ con $x \in A$.

2. $\downarrow A = \cup \downarrow x$ con $x \in A$.

3. A es un conjunto inferior si y solo si $A = \downarrow A$.

4. A es un conjunto superior si y solo si $A = \uparrow A$.

Proposición 2.1.9. Sea $(X, \leqslant)$ un conjunto preordenado, entonces si $a \subset X$, se tiene que $\uparrow (X \setminus A) = X \setminus A$ si y solo si $\downarrow A = A$.

Demostración. Como es trivial que $A \subset \downarrow A$ basta probar que $\downarrow A \subset A$. Sea $x \in \downarrow A$, entonces $x \leqslant y$, para algún $y \in A$ (que depende de x), luego $y \in \uparrow x$, si se admite que $x \in (X \setminus A)$, como $y \geqslant x$, se tiene que $y \in \uparrow (X \setminus A)$, como $\uparrow (X - A) = X - A$, como se tiene que $y \in A$ esto es una contradicción. La demostración del recíproco es totalmente análoga.

Definición 2.1.10. Dadas dos topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ sobre un conjunto X, se dirá que T es menos fina que $\mathcal{T}'$ (o T' más fina que $\mathcal{T}$) cuando $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, y se denota por $\mathcal{T}' \succeq \mathcal{T}$. El conjunto $TOP(X)$ de las topologías sobre X es un conjunto parcialmente ordenado respecto a dicha relación (ser más fina que).

Si $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}' \in TOP(X)$, se tiene que $inf \mathcal{T}, \mathcal{T}' = \mathcal{T} \cap \mathcal{T}' \in TOP(X)$ y $sup(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ es la topología que tiene como subbase $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$.

Definición 2.1.11. Dados dos elementos x e y de un conjunto parcialmente ordenado X se dice que y sigue a x si $x \leqslant y$ y no existe ningún $z \in X$ tal que $x \leqslant z \leqslant y$.

Definición 2.1.12. Se dice que $(X, \leqslant)$ es un conjunto bien ordenado (la relación $\leqslant$ es bien fundada) si es un conjunto no vacío totalmente ordenado tal que todo subconjunto no vacío tiene un elemento mínimo.

En la Figura 2.1 podemos ver un pequeño esquema sobre los tipos de conjuntos ordenados que se obtienen al ir introduciendo nuevas relaciones binarias.

Definición 2.1.13. Si $(X, \leqslant)$ e $(Y, \leqslant')$ son dos conjuntos parcialmente ordenados, se dice que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ preserva el orden si para cualquier $x, y \in X$, con $x \leqslant y$, se tiene que $f(x) \leqslant' f(y)$ en Y

A continuación introducimos el producto de conjuntos parcialmente ordenados, en el cual vamos a poder mostrar un ejemplo de una aplicación que preserve el orden.

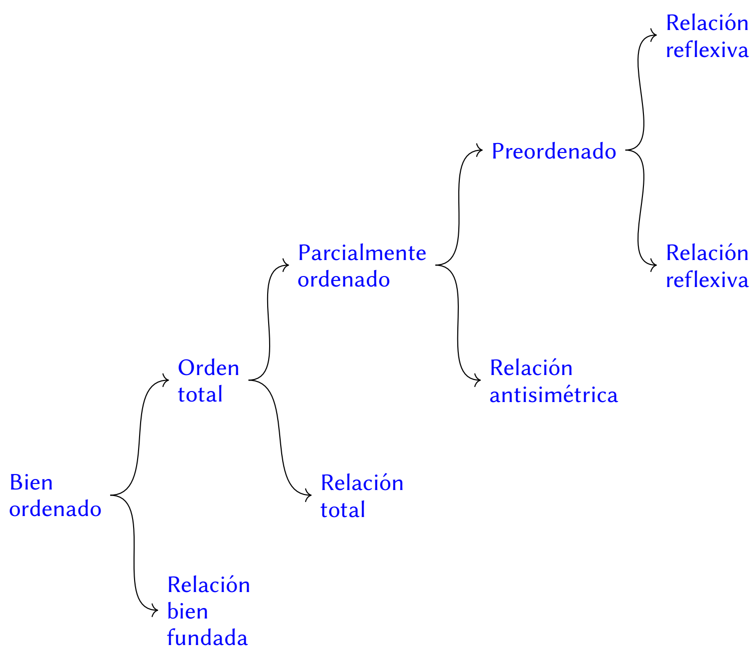


Figura 2.1: *Teoría del Orden.*

Sea $(X_i, \leqslant_i)$, $i = 1, \dots, n$ una familia de conjuntos parcialmente ordenados, y consideremos su producto cartesiano

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n.$$

Se pueden definir muchos tipos de ordenes parciales dentro del conjunto del producto cartesiano. Nosotros definiremos dos. El orden cartesiano, que lo denotaremos por $\leqslant_c$, y el orden lexicográfico, $\leqslant_l$.

Dados dos elementos $(a_1, \dots, a_n)$ y $(b_1, \dots, b_n)$ en $\prod_{i=1}^{n} X_i$, tenemos que

$$(a_1, \dots, a_n) \leqslant_c (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_i \leqslant_i b_i \forall i = 1, \dots, n.$$

y

$$(a_1, \dots, a_n) \leqslant_l (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow \exists k \geqslant 1, \forall i < k,\ a_i = b_i \text{ y } a_k \leqslant_k b_k.$$

Para el orden cartesiano sobre el producto de dos conjuntos parcialmente ordenados $(X_1, \leqslant_1)$ y $(X_2, \leqslant_2)$, $(a, b) \leqslant_c (c, d)$ si se tiene que

$a \leqslant_1 c$ y $b = d$, o $a = c$ y $b \leqslant_2 d$ o $a \leqslant_1 c$ y $b \leqslant_2 d$. Además considerando la Definición 2.2.17 podemos dibujar el diagrama de Hasse del producto de conjuntos parcialmente ordenados sustituyendo cada punto de X_1 por una copia del diagrama de X_2 y después establecemos las relaciones correspondientes entre ellos. Como podemos observar en la figura 2.2:

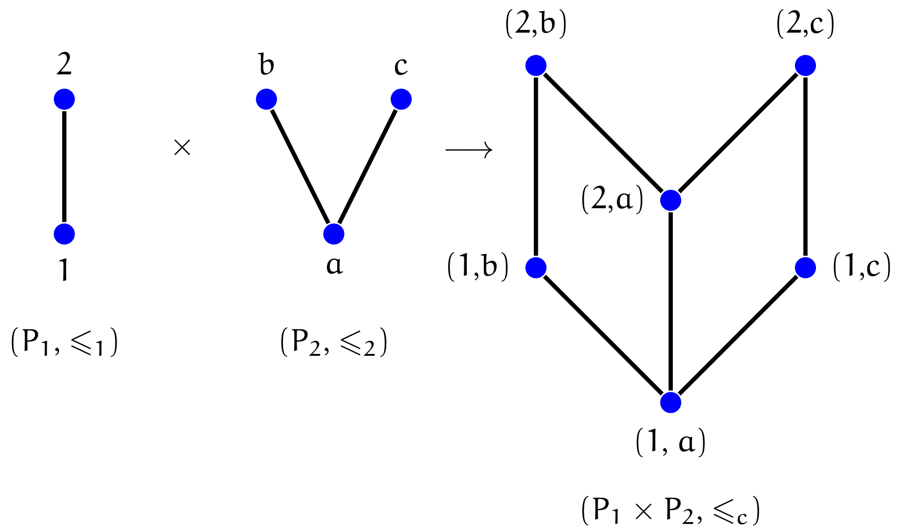


Figura 2.2: *Producto coordenada a coordenada.*

Si consideramos el orden lexicográfico $(a, b) \leqslant_l (c, d)$ si se tiene que $a \leqslant_1 c$ o $a = c$ y $b \leqslant_2 d$. Y aplicándolo al caso anterior obtendríamos el orden representado en la figura 2.3.

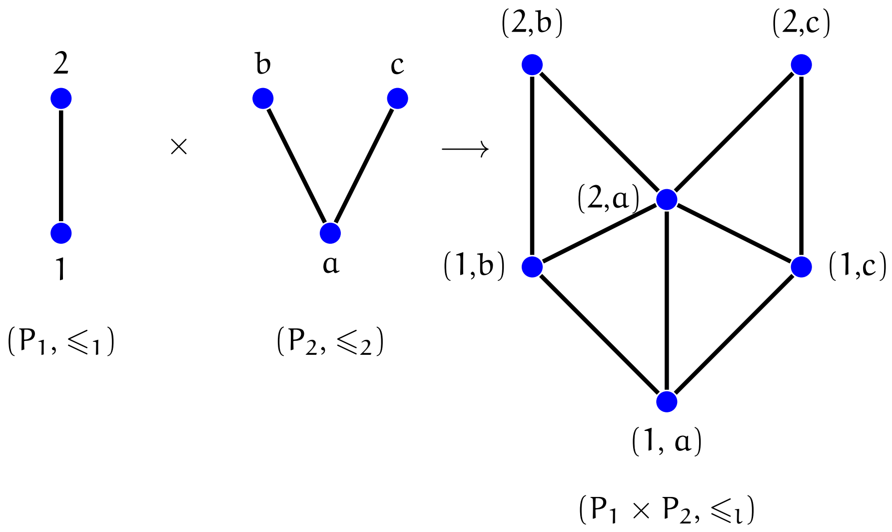


Figura 2.3: *Producto con el orden lexicográfico.*

2.2. Nociones Sobre Teoría de Grafos.

Definición 2.2.1. Dado un conjunto V, denotamos por $[V]^n$ al conjunto de todas las n-uplas de elementos de V. Un grafo G es un par $G = (V, E)$ de conjuntos tal que $E \subseteq [V]^2$. Los elementos de V y E son los vértices y las aristas del grafo respectivamente. Un grafo con conjunto de vértices V se dice que es un grafo sobre V.

Nota 2.2.2.

1. El conjunto de vértices de un grafo se denota por $V(G)$ y el de aristas por $E(G)$.

2. Un grafo G es finito si $V(G)$ (y por lo tanto $E(G)$) es finito. En otro caso, es infinito.

Definición 2.2.3. Sea G un grafo. Entonces el grafo complemento o complementario, $\overline{G}$, el es que se obtiene de los vértices de G y dos puntos están unidos por una arista en $\overline{G}$ si no lo están en G.

Definición 2.2.4. Un vértice v se dice que incidente con una arista e si $v \in e$. Una arista $\{u, v\}$ suele denotarse por uv (o vu)

Definición 2.2.5. Dos vértices u, v se dicen adyacentes si $uv \in E(G)$. El conjunto de todos los vértices adyacentes a v y el conjunto de todas las aristas $e \in E$ con $v \in e$ se denotan por A_v y $E(v)$ respectivamente.

Se define el grado de un vértice $d_G(v) = d(v) = gr(v), v \in V$ como $|E(v)|$, que es igual al número de vértices adyacentes a v, denotado por $|A_v|$. El grado de un vértice es 0 si está aislado. El grado máximo en el grafo se denotará por $\Delta(G)$ y el mínimo por $\delta(G)$.

Definición 2.2.6. Si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$ entonces $G' = (V', E')$ es un subgrafo de $G = (V, E)$, y se denota por $G' \subseteq G$. Si $G' \subset G$ y G' contiene todas las aristas $uv \in E$ con $u, v \in V'$, entonces G' es el subgrafo inducido de G en V', y escribimos que $G' = G[V']$.

Ejemplo 2.2.7.

1. Denotamos por K_n al grafo completo (donde todo vértice es adyacente al resto) con n vértices.

2. Denotamos por $K_{m,n}$ al grafo bipartito donde los conjuntos partitos tienen tamaño m y n. también puede denotarse por $G = (V_1, V_2; E)$, donde $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y cada arista de E une un vértice de V_1 a uno de V_2, y $|V_1| = n$, $|V_2| = m$.

3. Denotamos por P_n al camino de n vértices.

4. Denotamos por C_n al ciclo de n vértices.

5. El máximo grado en un grafo G se denota por $\Delta(G)$. Y el mínimo por $\delta(G)$. Se dice que G es regular si $\Delta(G) = \delta(G)$. Y k-regular si el grado común es k.

Definición 2.2.8. Sea $G = (V, E)$, se dice que G es un árbol si es un grafo conexo y sin ciclos. Este decir, un árbol es un grafo en el que dos vértices cualesquiera están conectados por exactamente un camino.

Definición 2.2.9. Para un grafo $G = (V, E)$, si $S \subseteq V$, entonces $G \setminus S$ es el subgrafo obtenido al eliminar el conjunto de vértices S, equivalentemente $G \setminus S = G[V \setminus S]$.

Un vértice de corte de G es un vértice cuya eliminación incrementa el número de componentes de G, es decir, un vértice $v \in V$ tal que $G \setminus \{v\}$ tiene mas componentes que G.

Un conjunto $C \subseteq V$ se llama conjunto separador de vértices minimal si $G \setminus C$ separa al grafo en mas de una componente conexa y no existe un conjunto de menor cardinal que C que verifique esta propiedad. Siendo G un grafo conexo. En particular un vértice de corte es un conjunto separador unitario.

Nota 2.2.10. Se sabe que un grafo conexo es un árbol si y solo si todo vértice de grado mayor que uno es un vértice de corte.

Definición 2.2.11. Un grafo es localmente finito si todos sus vértices tienen grado finito.

Definición 2.2.12. Un conjunto independiente en un grafo es un subconjunto de vértices ninguno de los cuales es adyacente a los demás.

Definición 2.2.13. Un clique en un grafo es un subgrafo isomorfo a un grafo completo.

Definición 2.2.14. Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos. Diremos que G_1 y G_2 son isomorfos, y lo denotaremos por $G_1 \cong G_2$, si existe una biyección $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ con $xy \in E_1$ si y solo si $\phi(x)\phi(y) \in E_2$ para todo $x, y \in V_1$. Tal aplicación ϕ se llama isomorfismo y si $G_1 = G_2$ entonces se conoce como automorfismo de G_1.

2.2.1. Relaciones de Preorden y Grafos Dirigidos.

Definición 2.2.15. un grafo dirigido o digrafo es un par (V, A) donde V (no vacío) es el conjunto de vértices y $A \subseteq V \times V$ es el conjunto de las aristas, llamadas arcos.

Nótese que todo grafo dirigido se puede representar por un grafo generalizado (admitiendo lazos entre sus vértices y aristas múltiples).

Sobre cada una de sus aristas se dibuja una flecha para señalar el par ordenado que la define.

Nota 2.2.16. Todo conjunto $(X, \leqslant)$ se puede representar por un grafo dirigido, en el que por simplificar se prescinde de los lazos en cada vértice. Si dicha relación es de orden parcial, en dicho grafo asociado, no aparecen aristas múltiples (por ser $\leqslant$ antisimétrica) y el grafo es transitivo, es decir, dado $G = (X, A)$ donde X es el conjunto de vértices y A es el conjunto de aristas donde $x \leqslant y$, el grafo es transitivo si dado $xy,\ yz\ \in A$ se tiene que $xz \in A$.

Definición 2.2.17. El diagrama de Hasse de $(X, \leqslant)$, donde $\leqslant$ es una relación de orden parcial, se define como el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) tales que $x \leqslant y$. Es decir, es el grafo obtenido a partir del digrafo definido en la Nota anterior.

Los diagramas de Hasse se representan por grafos dirigidos, donde los vértices representan los elementos del conjunto y las aristas (representadas con flechas), indican las relaciones de orden establecidas.

Usualmente si y sigue a x, se dibuja en el plano de manera que el punto que representa a y está por encima del que representa a x, entonces no existe la necesidad de usa flechas ya que la dirección de la arista está implícita.

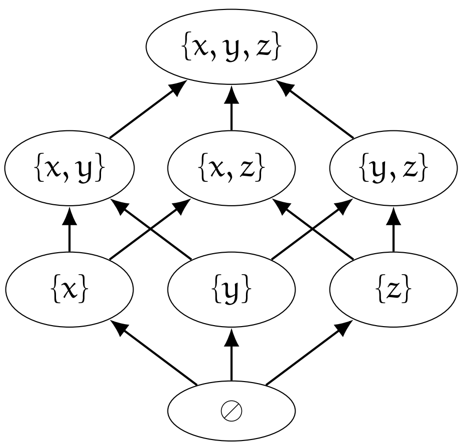


Figura 2.4: *Diagrama de Hasse de las partes de un conjunto de 3 elementos*

Ejemplo 2.2.18.
Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ (los divisores de 60). Este es un conjunto parcialmente ordenado por la relación de divisibilidad. Su diagrama de Hasse puede ser representado como se tiene en la figura 2.5:

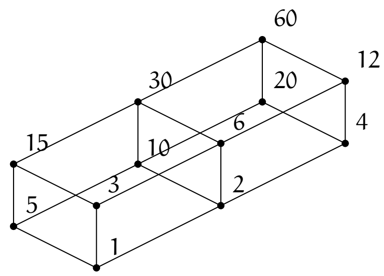


Figura 2.5: *Diagrama de Hasse asociado a A con la relación de divisibilidad.*

El diagrama de Hasse del poset de todos los divisores de un número n, parcialmente ordenados por la relación de divisibilidad. El mismo n está en la parte superior del diagrama mostrando así que es el elemento maximal del conjunto, el número 1 estaría en la parte inferior, denotando así que es el elemento minimal, y los divisores más pequeños (primos) seguirían al elemento inferior.

2.3. DE LA TOPOLOGÍA AL ORDEN.

Definición 2.3.1. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, sobre X se define la siguiente relación de preorden $\leqslant_{\mathcal{T}}$.

$$x \leqslant_{\mathcal{T}} y \text{ si } x \in \overline{\{y\}}$$

La relación $\leqslant_{\mathcal{T}}$ se llama preorden de especialización.

Alternativamente, $x \leqslant_{\mathcal{T}} y$ si y solo si cada conjunto abierto que contiene x también contiene a y.

Si un espacio tiene propiedades de separación de T_1 o superiores, entonces el orden de especialización se reduce al orden parcial trivial. Pero para lo espacios T_0 este orden es de especial interés. Gracias a las propiedades de los espacios T_0, existen resultados interesantes.

Proposición 2.3.2. $\leqslant_{\mathcal{T}}$ es un orden parcial si y solo si $(X, \mathcal{T})$ es T_0.

Demostración. Supongamos que $\leqslant_{\mathcal{T}}$ tiene la propiedad antisimétrica. Dados $x, y \in X$, si $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} = \mathcal{N}_y^{\mathcal{T}}$ se tendrá que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Entonces $x \in \overline{\{y\}}$ e $y \in \overline{\{x\}}$, por tanto $x \leqslant_{\mathcal{T}} y$ e $y \leqslant_{\mathcal{T}} x$. Por la propiedad antisimétrica de $\leqslant_{\mathcal{T}}$, sería $x = y$.

Recíprocamente, supongamos que $(X, \mathcal{T})$ sea T_0. Si $x \leqslant_{\mathcal{T}} y$, $x \in \overline{\{y\}}$, es decir, $y \in \mathcal{T}_x$, para todo abierto $\mathcal{V}_x$ que contenga a x. Análogamente, si $y \leqslant_{\mathcal{T}} x$ se tendría que $x \in \mathcal{V}_y$, para todo abierto $\mathcal{V}_y$ que contenga a x. Entonces, por ser $(X, \mathcal{T})$ un espacio T_0. Tendría que ser $x = y$.

Nota 2.3.3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

1. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico (T_0), el conjunto preordenado (parcialmente ordenado) obtenido mediante $\leqslant_{\mathcal{T}}$ se denotará por $(X, \leqslant_{\mathcal{T}})$.

2. Si X es finito, el orden de especialización permite interpretar o contar las topologías sobre X como preórdenes. Por ejemplo, si $X = \{a, b, c, d\}$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ sus abiertos propios se pueden representar mediante el diagrama 2.6

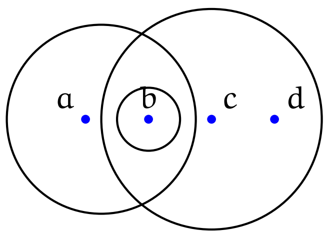


Figura 2.6: *Abiertos Propieos de* $\mathcal{T}$.

Por otra parte, el grafo transitivo asociado a $\leqslant_{\mathcal{T}}$ se representa en la figura 2.7. Y se observa que un conjunto de vértices U representa un abierto de $\mathcal{T}$ si cada flecha que tiene un vértice inicial en U tiene también su vértice final en U.

Ejemplo 2.3.4.

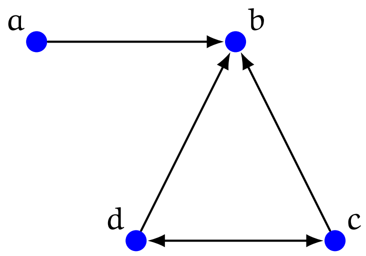


Figura 2.7: *Grafo asociado a* $\leqslant_{\mathcal{T}}$.

1. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ con la topología

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a, b, c\}, \{b\}, \{c\}, \{d, c\}, \{b, c, d\}, \{b, c\}\}.$$

   Como $\overline{\{a\}} = \{a\}$, $\overline{\{b\}} = \{b, a\}$, $\overline{\{c\}} = \{c, a, d\}$, $\overline{\{d\}} = \{d\}$, $(X, \mathcal{T})$ es T_0, y su orden de especialización es $\leqslant_{\mathcal{T}} = \{(a, b), (a, c), (d, c)\}$. El diagrama de Hasse de $(X, \leqslant_{\mathcal{T}})$ es el grafo en la figura 2.8.

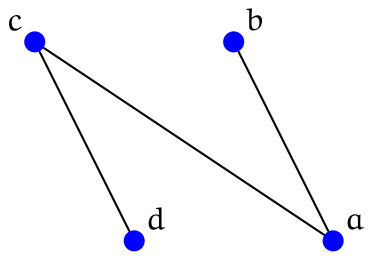


Figura 2.8: *Diagrama de Hasse de* $(X, \leqslant_{\mathcal{T}})$.

2. Si X es el conjunto anterior y

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$$

   Se tiene que $\overline{\{a\}} = \{a, c\}$, $\overline{\{b\}} = \{b, d\}$, $\overline{\{c\}} = \{c\}$, $\overline{\{d\}} = \{d\}$, y por tanto $(X, \mathcal{T})$ es T_0. Su orden de especialización es $\leqslant_{\mathcal{T}} = \{(a, c), (b, d)\}$ y el diagrama de Hasse es el grafo de la figura 2.9

En la siguiente proposición se recogen algunos resultados que reflejan la mucha influencia entre las propiedades de un espacio topológico y las del (pre)orden asociado. Se sobrentiende que las notaciones $\uparrow x$, $\downarrow x$, $\uparrow A$ ó $\downarrow A$ se refieren a los conjuntos inferiores construidos a partir del orden de especialización $\leqslant_{\mathcal{T}}$.

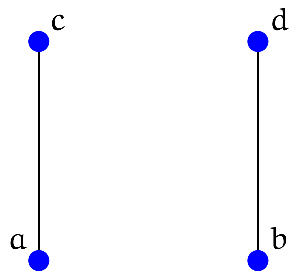


Figura 2.9: *Diagrama de Hasse asociado al orden de especialización.*

Proposición 2.3.5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico T_0 y $\leqslant_{\mathcal{T}}$ su orden de especialización. Entonces:

1. $\{x\}$ es abierto si u solo si x es un elemento maximal para $\leqslant_{\mathcal{T}}$.

2. $\{x\}$ es cerrado si y solo si x es un elemento minimal para $\leqslant_{\mathcal{T}}$.

3. Si $\leqslant_{\mathcal{T}}$ admite un elemento máximo a, entonces $\{a\}$ es denso en $(X, \mathcal{T}$.

4. Si $\leqslant_{\mathcal{T}}$ admite un elemento mínimo b, entonces b pertenece a todo cerrado de $(X, \mathcal{T})$.

5. Si $A = \{x \in X : \ x \text{ es maximal para } \leqslant_{\mathcal{T}}\}$, entonces A es abierto, y es el menor subconjunto denso de $(X, \mathcal{T})$.

Demostración.

1. Veamos que si $\{x\}$ es abierto, entonces x es maximal para $\leqslant_{\mathcal{T}}$, es decir, que si $x \leqslant_{\mathcal{T}} z$, entonces $x = z$. En efecto, si $x \leqslant_{\mathcal{T}} z$, entonces $x \in \overline{\{z\}}$, y como se supone que $\{x\} \in \mathcal{T}$, $\{x\} \cap \{z\} \neq \emptyset$. Es decir, $x = z$. Recíprocamente, supongamos que x es maximal para $\leqslant_{\mathcal{T}}$. Veamos que $\{x\} = \bigcap\{V_x : \ V_x \text{ es abierto y } x \in X\}$. Si existiese $y \in \bigcap\{V_x : \ V_x \text{ es abierto y } x \in X\}$, $y \neq x$, se tendrá que $x \in \{y\}$, es decir sería $x \leqslant_{\mathcal{T}} y$, y esto contradice que x sea maximal.

2. Supongamos que $\{x\} = \overline{\{x\}}$. Si $y \leqslant_{\mathcal{T}} x$, $x \in \overline{\{x\}} = \{x\}$, luego $y = x$. Recíprocamente, supongamos que x es minimal y que $y \in \overline{\{x\}}$. Entonces, se tendrá que $y \leqslant_{\mathcal{T}} x$, luego $y = x$.

3. Sea a el máximo para $\leqslant_{\mathcal{T}}$. Entonces, para todo $y \in X$, se tiene que $y \leqslant_{\mathcal{T}} a$, luego $y \in \overline{\{a\}}$. Es decir, $\overline{\{a\}} = X$.

4. Sea $C \subset X$ cerrado no vacío. Si $y \in C$, entonces $\overline{\{y\}} \subset C$, y como b es mínimo para $\leqslant_{\mathcal{T}}$, se tiene que $b \leqslant_{\mathcal{T}} y$, luego $b \in \overline{\{y\}}$.

5. Si $x \in A$, entonces $\{x\}$ es abierto, luego A lo es. Por otra parte, si $D \subset X$ es denso, entonces $\{x\} \cap D \neq \emptyset$. Luego $x \in D$ y se tiene que $A \subseteq D$.

2.4. Del Orden a la Topología.

Hasta aquí hemos visto como una topología sobre un conjunto da lugar a una relación (pre)orden. A continuación vamos a comprobar que se tiene el camino inverso.

Teorema 2.4.1. Sea $(X, \leqslant)$ un conjunto (pre)ordenado, entonces el conjunto $\mathcal{B} = \{\uparrow x : x \in X\}$ es base para una topología en X, que será denotada por $\mathcal{T}(\leqslant)$.

Demostración. Es claro que $\bigcup_{x\in X} \uparrow x = X$. Supongamos que si $z \in \uparrow x \cap \uparrow y$, entonces $x \leqslant z$ e $y \leqslant z$, por lo tanto, por la propiedad transitiva y reflexiva, $z \in \uparrow z \subseteq \uparrow x \cap \uparrow y$. Luego $\mathcal{B}$ es una base. ■

Proposición 2.4.2. Dado $(X, \mathcal{T}(\leqslant))$ el espacio topológico obtenido de $(X, \leqslant)$, y dado $A \subseteq X$, se tiene:

1. A es un abierto si y solo si $A = \uparrow A$.

2. A es cerrado si y solo si $A = \downarrow A$.

Demostración.

1. Teniendo en cuenta la base de la topología $\mathcal{T}(\leqslant)$, A es abierto si y solo si $A = \cup\{\uparrow x : x \in A\}$ y a su vez por la Nota 2.1.8 se tiene que $\cup\{\uparrow x : x \in A\} = \uparrow A$.

2. Se tiene que A es cerrado si y solo si $X \setminus A$ es abierto, y es abierto si y solo si (por el apartado anterior) $X \setminus A = \uparrow (X \setminus A)$, que por la Proposición 2.1.9 es equivalente a que $A = \downarrow A$.

Ejemplo 2.4.3.
Consideremos el conjunto parcialmente ordenado X con el orden parcial descrito en la figura 2.10:

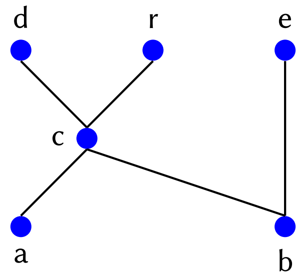


Figura 2.10: *Orden parcial asociado a* X.

Entonces:

1. El conjunto $A = \{e,\ b\} =\downarrow A$, luego A es cerrado.
2. El conjunto $B = \{a,\ c,\ d,\ r\} =\uparrow B$, luego B es abierto.
3. El conjunto $C = \{d,\ c\}$ no es superior ni inferior, entonces C no es ni abierto, ni cerrado.

Proposición 2.4.4. $(X, \leqslant)$ es conjunto parcialmente ordenado si y solo si $\mathcal{T}(\leqslant)$ es T_0.

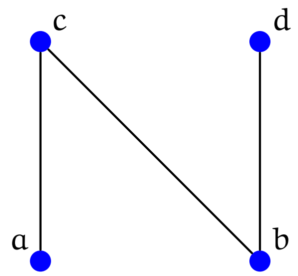
Demostración. Veamos primero que se verifica el axioma de separación T_0. Sean $x, y \in X$ dos puntos distintos. Como X es un conjunto parcialmente ordenado con la relación $\leqslant$, se nos presentan tres casos:

1. x e y no están relacionados, entonces, $x \notin\uparrow y$ e $y \notin\uparrow x$, con lo cual se verifica el axioma de separación T_0.
2. Que $x \leqslant y$ ó que $y \leqslant x$. En el caso $x \leqslant y$, se tiene que $y \in\uparrow x$ pero $x \notin\uparrow y$.

Recíprocamente supongamos que $\mathcal{T}(\leqslant)$ es T_0. Entonces veamos que $\leqslant$ es parcialmente ordenado. Supongamos que $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$, tenemos que llegar a la conclusión de que son iguales. Si $x \neq y$ como $\mathcal{T}(\leqslant)$ es T_0 existirían o bien un $U \in \mathcal{T}(\leqslant)$ con $x \in U$ e $y \notin U$ o un

$V \in \mathcal{T}(\leqslant)$ con $y \in V$ y $x \notin V$. Si estamos en el primer caso, como $\uparrow x \subset U$, entonces $y \notin \uparrow x$ lo cual es una contradicción. El segundo caso se tiene de forma análoga. ■

Ejemplo 2.4.5.
Sea $X = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ con el orden parcial $a \leqslant c$, $b \leqslant c$ y $b \leqslant d$ como se muestra en la figura



Entonces la correspondiente topología es:

$$\mathcal{T} = \{\emptyset,\ X,\ \{c\},\ \{d\},\ \{c,\ d\},\ \{a,\ c\},\ \{a,\ c,\ d\},\ \{a,\ c,\ d\},\ \{b,\ c,\ d\}\}.$$

Cuya base $B = \{\uparrow x :\ x \in X\}$ es el conjunto

$$\mathcal{B} = \{\{c\},\ \{d\},\ \{a,\ c\},\ \{b,\ c,\ d\}\}.$$

Estas asociaciones entre ordenes y topologías son inversa la una de la otra en cierto sentido.

Proposición 2.4.6. Dado un conjunto $(X, \leqslant)$ (pre)ordenado siempre se cumple que el orden de especialización asociado a la topologia $\mathcal{T}(\leqslant)$ $(\leqslant_{\mathcal{T}_{\leqslant}})$ coincide con $\leqslant$.

Demostración. Si $x, y \in X$, entonces $x \leqslant_{\mathcal{T}(\leqslant)} y$ si y solo si $x \in \overline{\{y\}}^{\mathcal{T}(\leqslant)} = \downarrow y$ si y solo si $y \leqslant x$. ■

Nota 2.4.7. Veamos que $\overline{\{y\}}^{\mathcal{T}(\leqslant)} = \downarrow y$ y sea $z \in \overline{\{y\}}^{\mathcal{T}(\leqslant)}$ entonces todo abierto de la topología $\mathcal{T}(\leqslant)$ que contiene z, contiene a y, en particular $\uparrow z$. Entonces $y \geqslant z$ entonces $z \in \downarrow y$.

Recíprocamente sea $z \in \downarrow y$ entonces $z \leqslant y$ luego $y \in \uparrow z$ y por tanto y pertenece a cualquier abierto de la topología $\mathcal{T}(\leqslant)$ que contenga a z, es decir, $z \in \{y\}^{\mathcal{T}(\leqslant)}$.

Ejemplo 2.4.8.
En general si no se pone condiciones sobre la topología ni el cardinal de X, la igualdad
$$\mathcal{T}(\leqslant_{\mathcal{T}}) = \mathcal{T}$$
no siempre es cierta. Para ello consideremos el espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{cofinita}})$. Como esta topología es T_1 los conjuntos unitarios son cerrados, es decir $\overline{\{y\}} = \{y\}$ para todo $y \in \mathbb{R}$, es decir, $x \leqslant_{\mathcal{T}_{\text{cofinita}}} y$ si $x \in \overline{\{y\}} = \{y\}$ esto solo ocurre si y solo si $x = y$, esto significa que $\uparrow x = \{x\}$. Por tanto $\mathcal{T}(\leqslant_{\mathcal{T}})$ es la topología discreta.

Veamos que toda aplicación isótona entre conjuntos parcialmente ordenados induce una aplicación continua entre los espacios topológicos asociados.

Proposición 2.4.9. Sean $(X, \leqslant)$, e $(Y, \leqslant')$ dos conjuntos parcialmente ordenados. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación isótona (preserva el orden), la aplicación inducida (considerando la aplicación entre los espacios topológicos asociados al orden), $f : (X, \mathcal{T}(\leqslant)) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}(\leqslant'))$ es continua.

Demostración. Veamos que para cada $x \in X$ se tiene que $f^{-1}(\downarrow f(x))$ contiene a $\downarrow x$, es decir que es entorno de x, y así se probaría que la aplicación es continua. Ahora bien, $y \leqslant x \Rightarrow f(y) \leqslant' f(x)$. Por tanto $y \in\downarrow x \Leftrightarrow f(y) \in\downarrow f(x)$, luego
$$\downarrow x \subset f^{-1}(\downarrow f(x)).$$
■

Corolario 2.4.10. f es un isomorfismo de orden si y solo si la f es un homeomorfismo entre los espacios topológicos asociados a la relación de orden.

3

Espacios de Alexandroff. Propiedades Generales.

3.1. Topología de Alexandroff.

INTRODUCCIÓN Y RESERÑA HISTÓRICA.

En este capítulo trataremos con espacios con una propiedad topológica más restrictiva, espacios que tienen la propiedad de que la intersección arbitraria de abiertos es abierta.

Definición 3.1.1. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, se dirá que es un espacio de Alexandroff o un A-espacio si verifica que la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Esta definición es equivalente a decir que X es un A-espacio si cada punto tiene un entorno mínimo o equivalentemente, que tiene una base minimal.

Proposición 3.1.2. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio de topológico, entonces X es un A-espacio si y solo si cada punto tiene un entorno mínimo $\mathcal{U}_x$.

Demostración. Supongamos que X es un A-espacio. Dado $x \in X$, tomamos los abiertos $O_i \in \mathcal{T}$ que contienen a x. Entonces $\mathcal{U}_x = \cap O_i(x), x \in \cap O_i(x)$ (que es abierto por hipótesis). Luego es entorno de x. Por otra parte, si N es otro entorno de x, existe G abierto, con $x \in G$ tal que $G \subset N$, luego $\mathcal{U}_x = \cap O_i(x) \subset G \subset N$.

Veamos ahora el recíproco. Supongamos que todo $x \in X$ tiene un entorno mínimo. Sea $\{O_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos con $\cap O_i \neq \emptyset$. Tenemos que probar que $\cap O_i$ es abierto, es decir, que es entorno de todos sus puntos. Si $x \in \cap O_i$ entonces $x \in O_i$ para todo i luego si $\mathcal{U}_x$ es el menor entorno de x, entonces $\mathcal{U}_x \subset \cap O_i(x)$. ∎

Nota 3.1.3. Obsérvese que $\mathcal{U}_x \in \mathcal{T}$; de hecho se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.1.4. Sea $(X, \mathcal{T})$ un A-espacio, sea $A \in \mathcal{T}$ entonces:

$$\overline{A} = \cup_{x \in A} \overline{\{x\}} \tag{3.1}$$

Demostración. Basta probar que $\overline{A} \subset cup_{x \in A}\{x\}$. Sea $y \in \overline{A}$ entonces $\mathcal{U}_\dagger \cap A \neq \emptyset$. Sea $x \in \mathcal{U}_y \cap A$. Entonces $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}_y$ luego cualquier abierto que contenga a y contiene a x. ■

Teorema 3.1.5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un A-espacio. Entonces $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_x : x \in X\}$ es la única base minimal para la topología.

Demostración. Obviamente $\mathcal{U}$ es un recubrimiento abierto de X. Por otra parte si $G \in \mathcal{T}$ y $x \in G$, como $\mathcal{U}_x$ es el menor abierto que contiene a x, se tiene que $x \in \mathcal{U}_x \subset G$. Veamos que es minimal. Sea $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{T}$, tenemos que probar que $\mathcal{U}_x \in \mathcal{B}$ para todo $x \in X$. Pero dado $x \in X$ existe $\mathcal{B}_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \mathcal{B}_x \subset \mathcal{U}_x$ (por ser $\mathcal{B}$ una base), por lo tanto, por su propia definición, $\mathcal{U}_x$ es el menor abierto que contiene a x, luego $x \in \mathcal{U}_x = \mathcal{B}_x$ para todo $x \in X$. ■

A continuación el siguiente resultado nos proporciona una forma de comprobar si una familia de subconjuntos de un A-espacio $(X, \mathcal{T})$ es su base minimal. Sin necesidad de enumerar sus elementos mediante los puntos de X, evitando así, dar información redundante si el espacio no es T_0. Ya que existirían entornos mínimos iguales para puntos de X diferentes.

Teorema 3.1.6. Sea X un A-espacio y $\mathcal{B}$ una familia de abiertos de X. Entonces $\mathcal{B}$ es la base minimal para la topología de X si y solo si:

1. $\mathcal{B}$ recubre X.
2. Si $A, B \in \mathcal{B}$ existe una subfamilia $\{B_i : i \in I\}$ de $\mathcal{B}$ tal que $A \cap B = \bigcup_{i \in I} B_i$.
3. Si una subfamilia $\{B_i : i \in I\}$ de $\mathcal{B}$ verifica que $\bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{B}$. Entonces existe $i_0 \in I$ tal que $\bigcup_{i \in I} B_i = B_{i_0}$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{B}$ satisface 1. y 2. Entonces $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{T}$, y por tanto $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_x : x \in X\} \subset \mathcal{B}$. Pero si $B \in \mathcal{B}$ es unión de conjuntos de la forma $\mathcal{U}_x$ y por 3. debe ser uno de ellos, así que $B \in \mathcal{U}$.

El recíproco se tiene gracias al hecho de que es una base minimal.

Teorema 3.1.7. Si $(A, \mathcal{T}_A)$ es un subespacio de un A-espacio $(X, \mathcal{T})$ entonces A es un A-espacio con la topología relativa $\mathcal{T}_A$.

Demostración. Sea $x \in A$ y supongamos que U es un abierto en A que contiene a x. Entonces $U = Y \cap O$, donde O es un abierto de X, por la definición topología relativa. Si $\mathcal{U}_x$ es el entorno mínimo de $x \in X$, $\mathcal{U}_x \subseteq O$, y se tiene que $A \cap \mathcal{U}_x$ es el entorno mínimo de $x \in A$. ■

El resultado anterior prueba que la propiedad de ser un A-espacio, es hereditaria. Pero en algunas referencias ([3, 11, 12, 13]) introducen la siguiente afirmación junto al resultado anterior:

Si $\mathcal{U}$ es la base minimal de X entonces $\mathcal{U}_A = \{A \cap \mathcal{U}_x \; x \in A, \mathcal{U}_x \in \mathcal{U}\}$. Pero esto falla y le veremos a continuación.

Nota 3.1.8. Sea $X = \{a, b, c\}$ con la topología

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}. \tag{3.2}$$

Es fácil ver que $\{\{b\}, \{c\}, X\}$ es una base minimal para X. Sea $A = \{b, c\}$. Entonces se observa que $A \cap \mathcal{U} = \{\{b\}, \{c\}, A\}$ que no es una base mínima para A ya que está fallando el tercer apartado del Teorema 3.1.6. Con lo que se concluye que la base minimal de A debe estar contenida en las intersecciones, pero no es igual.

Teorema 3.1.9. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio de Alexandroff. Entonces X es T_0 si y solo si el hecho de que $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$ implica que $x = y$ con $x, y \in X$

Demostración. Supongamos primero que X es T_0. Por definición, sabemos que dados dos elementos $x, y \in X$ entonces existe un abierto $O \in \mathcal{T}$ tal que $x \in O$ e $y \notin O$ o $x \notin O$ e $y \in O$. Como $(X, \mathcal{T})$ es un A-espacio podemos tomar $O = \mathcal{U}_x$ o $O = \mathcal{U}_y$, tomar el abierto como el abierto mínimo, ya que éste esta contenido en cualquier abierto que contenga al punto. Supongamos ahora que $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$ como la propiedad T_0 es hereditaria, supongamos sin perdida de generalidad, que debe existir un abierto $O \in \mathcal{U}_x$ tal que $x \in O$ e $y \notin O$ pero entonces $\mathcal{U}_x$ no sería el abierto mínimo de x y esto sería una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$ implica que $x = y$ con $x, y \in X$, luego sabes que $x \neq y$ implica que $\mathcal{U}_x \neq \mathcal{U}_y$, esto significa que:

1. $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \emptyset$, esto implicaría que el espacio sería T_1 y por lo tanto T_0 como vimos en la sección de axiomas de separación.

2. $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}_y$ y por lo tanto $y \notin \mathcal{U}_x$ porque sino $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$ o $\mathcal{U}_y \subset \mathcal{U}_x$ y $x \notin \mathcal{U}_y$. Y esto es la definición de espacio T_0. ■

Una definición de interés dentro de los A-espacios y en especial para la topología digital es el concepto de espacio localmente finito.

Definición 3.1.10. Todo espacio espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es dice localmente finito si todo elemento x de X está contenido en un abierto y un cerrado finitos.

Teorema 3.1.11.

1. Todo espacio finito es localmente finito.

2. Todo espacio localmente finito es un A-espacio.

Demostración.

1. Trivial.

2. Sea X un espacio localmente finito, y sea $x \in X$, entonces existe un conjunto abierto finito U que contiene a x el cual podemos considerar sin perdida de generalidad que sea el entorno mínimo. Como x es cualquiera, X es un A-espacio.

Ejemplo 3.1.12.

1. Todo espacio topológico discreto es un A-espacio. Siendo $\{x\}$ el entorno mínimo de X.

2. Todo espacio finito es un A-espacio.

3. Sean $X = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ y $\mathcal{B} = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$. Entonces X es un espacio de Alexandroff con $U_x = (n, n+1)$ con $n < x < n+1$. Para cualesquiera dos entornos mínimos $U_x \neq U_y$ tenemos que $U_x \cap U_y = \emptyset$.

4. ($\mathbb{R}$ con la topología punto incluido) Sea $\mathcal{T}_0 = \{\emptyset\} \cup \{G \subset \mathbb{R} : 0 \in G\}$. Entonces $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$ es un A-espacio. En este caso $\mathcal{U}_0 = \{0\}$ y $\mathcal{U}_x = \{0, x\}$ si $x \neq 0$.

5. $\mathbb{Z}$ con topología de Khalimsky. Sobre $\mathbb{Z}$, se considera la topología $\mathcal{T}_K$ generada por la familia (véase la figura 3.1)

$$\mathcal{B} = \{\{2n, 2n+1, 2n+2\},\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{2n+1,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset\}.$$

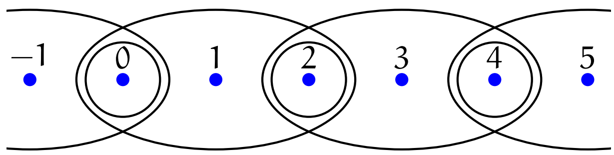


Figura 3.1: *Topología de Khalimsky.*

Se tiene que $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$ es un A-espacio, siendo

$$\mathcal{U}_n = \begin{cases} \{n\} & \text{si } n \text{ es par} \\ \{n-1, n, n+1\} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Además, esta topología es T_0, pues si $x \neq y$ con x, y impares, y $x < y$, entonces $y \notin \mathcal{U}_x = \{x-1, x, x+1\}$. En los demás casos es inmediato, ya que el entorno mínimo de cualquier punto par es unitario.

A continuación se mostrará un ejemplo de A-espacios en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 3.1.13.
Sea X igual a $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathcal{B} = \{\overline{B(0,r)};\ r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}\}$. Nótese que $\overline{B(0,r)}$ es la bola cerrada de centro 0 y radio r y que $\overline{B(0,0)} = \{0\}$. Si $x \in X$ entonces $\overline{B(0,|x|)}$ es un entorno mínimo en $\mathcal{B}$ que contiene a x. $\mathcal{B}$ es una base para una topología de Alexandroff en X.

Ejemplo 3.1.14.
Sea $X =$ y $\beta = \{\overline{B(0,r)};\ r \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}\}$. Con la topología generada por β, D^n es compacto, pues todo recubrimiento de D^n contiene a D^n.

Teorema 3.1.15. Sea X un conjunto y $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que para cada $x \in X$ existe un conjunto minimal $m(x) \in \mathcal{B}$ con $x \in m(x)$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base para una topología $\mathcal{T}$ sobre X, tal que $(X, \mathcal{T})$ es un A-espacio, y $\mathcal{U}_x = m(x)$.

Demostración. Es claro que los elementos de $\mathcal{B}$ recubren X, supongamos que $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, y $x \in B_1 \cap B_2$. Por hipótesis existe un conjunto minimal $m(x) \in \mathcal{B}$, que contiene a x. Tenemos que $m(x) \subseteq B_1$), y $m(x) \subseteq B_2$), luego $x \in m(x) \subseteq B_1 \cap B_2$, así que $\mathcal{B}$ es una base para la topología en X.

Para probar que $(X, \mathcal{T}(\mathcal{B})$ es un A-espacio, veamos que cada punto admite un abierto mínimo $m(x)$. En efecto, $m(x)$ es un abierto para dicha topología, porque $m(x) \in \mathcal{B}$. Sea $O \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ con $x \in O$, entonces $O = \bigcup_{i \in I} B_i$, donde $B_i \in \mathcal{B}$. Luego $x \in B_i$ para algún $i \in I$, pero por hipótesis $m(x) \subseteq B_i \subseteq O$. Luego X es un A-espacio y $U_x = m(x)$.

El Teorema 3.1.15, nos permite indicar más ejemplos de A-espacios.

Ejemplo 3.1.16.

1. Tomamos $X = S^1$ y sea $R_n = \{z \in S^1 : z^n = 1\}$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea $\mathcal{B} = \{R_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. El punto $1 \in S^1$ tiene al conjunto $R_1 = \{1\}$ como abierto minimal en $\mathcal{B}$ que lo contiene. Supongamos que $z \in S^1$ y $z \neq 1$. Si $z^n = 1$ se tiene solo para $n = 0$, entonces $R_0 = S^1$ es un abierto minimal en $\mathcal{B}$ que contiene a z. Si $z^n = 1$ para algún $n \neq 0$ sea $m = min\{n \in \mathbb{N} : z^n = 1\}$. Supongamos $z \in R_p$ para algún $p > m$, entonces $p = qm + r$ donde $0 \leqslant r < m$. Entonces $1 = z^p = (z^m)^q z^r = z^r$. Pero

$r < m$ luego se debe tener $r = 0$. Por lo tanto, $p = qm$. Si $\rho \in R_m$, entonces $\rho^p = (\rho^m)^q = 1$ así $\rho \in R_p$. Ya que $R_m \subset R_p$ y así R_m es un abierto minimal en $\mathcal{B}$ que contiene a z. Este espacios es compacto porque cualquier recubrimiento abierto contiene a S^1.

2. Sea (X, d) un espacio métrico, entonces X es un A-espacio si y solo si X tiene asociada la topología discreta. En efecto, si X es un A-espacio entonces para cada $x \in X$ se tiene que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_d(x, \frac{1}{n})$ es un conjunto abierto, y por las propiedades de los espacio métricos tenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_d(x, \frac{1}{n}) = \{x\}$, luego X tiene la topología discreta.

   El caso contrario se tiene directamente del Ejemplo 3.1.12.

Teorema 3.1.17. Si $(X, \mathcal{T})$ es un A-espacio T_1 entonces $\mathcal{T}$ es la topología discreta.

Demostración. Si $(X, \mathcal{T})$ es T_1, por la Proposición 1.2.5 para cada $x \in X$, $\{x\} = \cap\{U : U \in \mathcal{T}, x \in U\}$. Por ser $(X, \mathcal{T})$ un A-espacio, $\{x\}$ es abierto, por lo que $\mathcal{T}$ es la discreta. ∎

Teorema 3.1.18. Si X e Y son A-espacios, entonces $X \times Y$, con la topología producto, es también un A-espacio.

Demostración. $X \times Y$ tiene como base $\mathcal{B} = \{U \times V : U$ es un abierto en X y V es un abierto en $Y\}$, sea $(x, y) \in X \times Y$, luego $U_x \times V_y \in \mathcal{B}$, veamos que $U_x \times V_y$ es un entorno mínimo de (x, y) en la topología producto.

En efecto, si W es un entorno de (x, y) en la topología producto, entonces existen $U \in \mathcal{T}$ y $V \in \mathcal{T}'$ tales que $(x, y) \in U \times V$ y $U \times V \subseteq W$, pero como $U_x \subseteq U$ y $V_y \subseteq V$, se tiene que $U_x \times V_y \subseteq U \times V \subseteq W$ y por lo tanto por el Teorema 3.1.15 $X \times Y$ es un A-espacio. ∎

Nota 3.1.19. La propiedad de ser A-espacio no se conserva al considerar productos infinitos de A-espacios.

Ejemplo 3.1.20.
Veamos en este Ejemplo el conjunto C de Cantor. C es el conjunto

de todos los números $x \in [0, 1]$ cuya expansión $x = 0.x_1 x_2 \dots x_n \dots$ en la base 3 no utiliza el dígito 1, esto es $x_i \neq 1$ para todo i con lo que $x_i \in \{0, 2\}$. Debido a esta descripción un punto $x \in C$ es un elemento $x \in \prod_{\mathbb{N}}\{0, 2\}$, $x : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 2\}$, lo cual nos hace pensar en el producto cartesiano. Geométricamente puede describirse formando los siguientes subconjuntos A_n cerrados en $[0, 1]$:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= [0, 1] \\
A_1 &= [0, 1/3] \cup [2/3, 1] \\
A_2 &= [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1] \\
&\dots
\end{aligned}
$$

En general A_{i+1} se obtiene de A_i removiendo la tercera parte en el medio de cada una de las componentes de A_i, con lo que

$$C = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i.$$

Cada punto en los extremos de las componentes de los A_i pertenece a C.

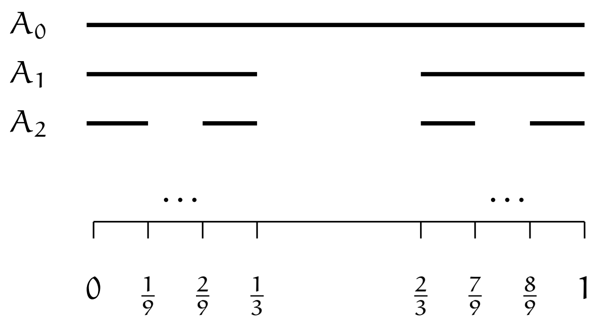


Figura 3.2: *Conjunto de Cantor.*

El conjunto C de Cantor es homeomorfo al espacio producto $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$, donde $(X_i, \mathcal{T}_d = (\{0, 2\}, \mathcal{T}_d)$ para cada i y $\mathcal{T}_d$ es la topología discreta. En efecto, si $x \in X$, con $x = (x_1, x_2, \dots)$ donde $x_n \in \{0, 2\}$. Definimos

$$f : \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \longrightarrow C \qquad \textbf{como} \qquad f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} x_n 3^{-n} \tag{3.3}$$

Se prueba que f es una función biyectiva y continua (ver [4], página 250) y como X es compacto y C es Hausdorff, por el Teorema 1.2.11 se tiene que f es un homeomorfismo.

Por el segundo apartado del Ejemplo 3.1.16, como el conjunto de Cantor es un espacio métrico no discreto entonces no puede ser un A-espacio, y por lo tanto X no es A-espacio.

Teorema 3.1.21. Si $X/\sim$ es el espacio cociente de un espacio de Alexandroff X, entonces $X/\sim$ es también un espacio de Alexandroff.

Demostración. Sea $q : X \longrightarrow X/\sim$ la aplicación cociente. Consideramos la intersección arbitraria, $\bigcap_{i\in I} U_i$, de conjuntos abiertos en $X/\sim$. Tenemos que $q^{-1}(\bigcap_{i\in I} U_i) = \bigcap_{i\in I} q^{-1}(U_i)$ Ahora, $q^{-1}(U_i)$ es abierto en X y por lo tanto $\bigcap_{i\in I} U_i$ es abierto en $X/\sim$ por definición de topología cociente. ■

Ejemplo 3.1.22.
Si X es un A-espacio, y consideremos la relación de equivalencia $\sim_{\mathcal{U}}$ en X por, $x \sim_{\mathcal{U}} y$ si $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$, el espacio cociente $X/\sim_{\mathcal{U}}$ es un A-espacio por el Teorema 3.1.21.

El siguiente Teorema 3.1.26 nos dirá cuando el espacio $X/\sim$ es un espacio discreto. Pero primero necesitamos la siguiente Definición 3.1.23.

Definición 3.1.23. Si X es un A-espacio y $x \in X$, entonces $\mathcal{U}_x$ se llama irreducible si $\mathcal{U}_y \subset \mathcal{U}_x$ implica que $\mathcal{U}_y = \mathcal{U}_x$.

Teorema 3.1.24. Si $\mathcal{U}_x$ y $\mathcal{U}_y$ son subconjuntos irreducibles distintos de X, entonces $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}_x$ y $\mathcal{U}_y$ son subconjuntos irreducibles distintos de X. Supongamos, además, que $z \in \mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y$. Entonces $\sqcap_z \subset \mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y$, lo que implica que $\mathcal{U}_z \subset \mathcal{U}_x$ y que $\mathcal{U}_z \subset \mathcal{U}_y$. Usando la irreducibilidad de $\mathcal{U}_x$ y de $\mathcal{U}_y$ tenemos que $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_z = \mathcal{U}_y$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \emptyset$. ■

Nota 3.1.25. Si en un A-espacio $(X, \mathcal{T})$ dos puntos distintos x e y adminten entornos irreducibles, por el Teorema anterior si $y \in \mathcal{U}_x$ entonces $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$ y por lo tanto el espacio no es T_0.

Teorema 3.1.26. $X/\sim$ es un espacio discreto si y solo si $\mathcal{U}_x$ es irreducible para todo $x \in X$.

Demostración. Primero, veamos la implicación hacia la derecha. Supongamos que $X/\sim$ es discreto. Si q es la aplicación cociente, entonces $q^{-1}([x])$ es abierto en X para todo x. Entonces $\mathcal{U}_x \subset q^{-1}([x])$ pues $x \in q^{-1}([x])$. Si $y \in q^{-1}([x])$, entonces $x \sim y$ lo que significa que $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}_y$. Por lo tanto, $y \in \mathcal{U}_x$, lo que implica que $q^{-1}([x]) = \mathcal{U}_x$. Supongamos ahora que $\mathcal{U}_z \subset \mathcal{U}_x$, entonces z está en $q^{-1}([x])$. Así deberíamos tener que $\mathcal{U}_z = \mathcal{U}_x$ pues $z \sim x$. Por lo tanto, $\mathcal{U}_x$ es irreducible.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{U}_x$ es irreducible para todo $x \in X$. Sea $y \in q^{-1}([x])$, entonces $x \sim y$, luego $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$. Esto implica que $q^{-1}([x]) \subset \mathcal{U}_x$. Ahora si $y \in \mathcal{U}_x$, entonces $\mathcal{U}_y \subset \mathcal{U}_x$ y ya que $\mathcal{U}_x$ es irreducible, debemos tener que $\mathcal{U}_y = \mathcal{U}_x$. Por lo tanto, $x \sim y$ así que $y\ in q^{-1}([x])$. Y tenemos que $q^{-1}([x]) = \mathcal{U}_x$ es abierto en X. Esto significa que $[x]$ es abierto en $X/\sim$ y se deduce que es discreto. ■

Recordando los axiomas de numerabilidad, existe un resultado interesente relacionado con los A-espacios, que veremos a continuación.

Proposición 3.1.27. Si $(X, \mathcal{T})$ es un A-espacio, entonces:

1. $(X, \mathcal{T})$ es primero numerable.
2. Si $(X, \mathcal{T})$ es T_0, entonces, es segundo numerable si y solo si X es numerable.
3. $(X, \mathcal{T})$ es separable si y solo si

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\{\mathcal{U}_n\}}.$$

Demostración.

1. Para cada x, $\mathcal{B}_x = \{\mathcal{U}_x\}$ es una base de entornos.

2. Todo espacio primero numerable y numerable es segundo numerable. Recíprocamente, si $(X, \mathcal{T})$ es segundo numerable, la base minimal $\mathcal{B} = \{\mathcal{U}_x\}_{x\in\mathbb{N}}$ es numerable. Por otra parte, la aplicación $\phi : X \longrightarrow \mathcal{B}$ dada por $\phi(x) = \mathcal{U}_x$ es inyectiva. En efecto, si $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$ por ser X un espacio T_0, ha de ser $x = y$.

3. Si $D = \{x_n\}$ es un conjunto denso y numerable, para cada $x \in X$ existe $x_n \in D \cap \mathcal{U}_x$, luego $x \in \overline{\{x_n\}}$, por tanto $X = \bigcup\{\overline{\{x_n\}} : x_n \in D\}$. Recíprocamente, sea $X = \cup\overline{\{x_n\}}$. Entonces $D = \{x_n\}$ es denso, pues dado $x \in X$ existe $x_n \in D$ tal que $x \in \overline{\{x_n\}}$, y se tendría que $x_n \in \mathcal{U}_x \cap D$. Por tanto D corta a cualquier objeto no vacío.

■

3.2. Aplicaciones Continuas entre A-espacios.

Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua y X es un A-espacio, entonces $f(X)$ no es necesariamente un A-espacio como se observa en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2.1.
Sea $X = \mathbb{N}$ con la topología discreta y sea $Y = \mathbb{Q}$ con la topología inducida por la topología usual de $\mathbb{R}$. Si $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ es una biyección, entonces f es continua, $\mathbb{Q}$ no es un A-espacio.

Por lo tanto se necesita una condición más fuerte sobre f para asegurarnos de que $f(X)$ es un A-espacio.

Teorema 3.2.2. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación abierta y continua. Si X es un A-espacio, entonces también lo es $f(X)$. Además, si $y \in f(X)$, entonces $\mathcal{V}_y = f(\mathcal{U}_x)$ con $f(x) = y$.

Demostración. Sea $y \in f(X)$ y sea $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Entonces $f(\mathcal{U}_x)$ es un abierto en $f(X)$ pues f es una aplicación abierta. Supongamos que y está contenido en un abierto O de $f(X)$. Esto implica que $x \in f^{-1}(O)$ y ya que $f^{-1}(O)$ es abierto en X pues f es continua, tenemos que $\mathcal{U}_x \subset f^{-1}(O)$. Por lo tanto, $f(\mathcal{U}_x) \subset O$, lo cual implica que $f(X)$ es un A-espacio y que $\mathcal{V}_y = f(\mathcal{U}_x)$. ■

El Corolario 3.2.3 muestra que ser A-espacio es una propiedad topológica.

Corolario 3.2.3. Si X es homeomorfo a Y y X es un A-espacio, entonces Y es un A-espacio.

Demostración. Si f es un homeomorfismo entre X e Y, entonces f es abierta y continua y por el teorema anterior se tiene el resultado. ■

El Teorema 3.2.4 proporciona un criterio para que dos A-espacios sean homeomorfos sin necesidad de tener una aplicación definida en el total, sino cómo están relacionados los entornos mínimos de los puntos de X e Y.

Teorema 3.2.4. Sean X e Y A-espacios tales que se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Existe una biyección $g : \{\mathcal{U}_x : x \in X\} \longrightarrow \{\mathcal{V}_y : y \in Y\}$.
2. Existe un homeomorfismo $f_x : \mathcal{U}_x \longrightarrow g(\mathcal{U}_x)$ para cada $x \in X$.
3. Si $\mathcal{U}_{x_1} \cap \mathcal{U}_{x_2} \neq \emptyset$ entonces $f_{x_1}(\mathcal{U}_{x_1} \cap \mathcal{U}_{x_2}) = f_{x_2}(\mathcal{U}_{x_1} \cap \mathcal{U}_{x_2})$.

Entonces X e Y son homeomorfos.

Demostración. Sea $h : X \longrightarrow Y$ dada por $h(x) = f_x(x)$ donde $x \in \mathcal{U}_z$. Veamos que h está bien definida. Si $x \in \mathcal{U}_{z_1}$ y $x \in \mathcal{U}_{z_2}$, entonces $f_{z_1}(x) = f_{z_2}(x)$ por la tercera condicion. Luego la elección de $h(x)$ no depende de qué z tomemos.

Ahora supongamos $y \in Y$, entonces, por la primera condición, existe $x \in X$ tal que $g(\mathcal{U}_x) = \mathcal{V}_y$. Como por la segunda condición, $f_x : \mathcal{U}_x \longrightarrow \mathcal{V}_y$ es un homeomorfismo, existe $z \in \mathcal{U}_x$ tal que $f_x(z) = y$. Por tanto $h(z) = f_x(z) = y$, lo que significa que h es sobreyectiva.

Veamos que h es inyectiva. Supongamos que $h(x_1) = h(x_2) = y$, entonces $y \in g(\mathcal{U}_{x_1})$ luego debe ocurrir que $\mathcal{V}_y \subset g(\mathcal{U}_{x_1})$. Pero ya que

$f_{x_1}^{-1}(\mathcal{V}_y)$ es abierto en $\mathcal{U}_{x_1}$ y $x_1 \in f_{x_1}^{-1}(\mathcal{V}_y)$, se tiene que $\mathcal{N}_{x_1} = f_{x_1}^{-1}(\mathcal{V}_y)$. Luego, $g(\mathcal{U}_{x_1}) = \mathcal{V}_y$.

Análogamente, obtenemos que $g(\mathcal{U}_{x_2}) = \mathcal{V}_y$. y g es inyectiva luego $\mathcal{U}_{x_1} = \mathcal{U}_{x_2}$. Con esto se deduce que $f_{x_1} = f_{x_2}$, así que $f_{x_1}(x_1) = f_{x_1}(x_2)$. En efecto, esta aplicación es inyectiva así que $x_1 = x_2$. Por lo que h es también inyectiva.

Para ver la continuidad de h, se usará la base de Y de entornos mínimos. Pero $h^{-1}(\mathcal{V}_y) = \mathcal{U}_x$, donde $h(x) = y$ por lo tanto es un conjunto abierto. Así pues, h es continua. De la misma manera se obtiene la continuidad de h^{-1}. ■

3.3. A-espacios Compactos.

Comenzaremos ahora el estudios de los A-espacios compactos. Si X es un A-espacio compacto, entonces puede ser recubierto por el conjunto $\{\mathcal{N}_x : x \in X\}$. Por lo tanto, debe ser recubierto por un número finito de ellos. Está propiedad clave será la que nos permita definir algunos invariantes de los A-espacios compactos.

Definición 3.3.1. Si X es un en A-espacio compacto, entonces definimos el conjunto $min(X) = \{|V| :$ V es un recubrimiento finito de X por entornos mínimos$\}$.

Ejemplo 3.3.2.
Las topologías dadas en los Ejemplos 3.1.14 y 3.1.16 en D^n y S^1 son compactas. Y se tiene que $min(D^n) = 1$ y $min(S^1) = 1$.

El Teorema 3.3.3 nos muestre que el conjunto $min(X)$ de un A-espacio, es un invariante del espacio. Sin embargo, esto no es suficiente para distinguir entre los espacios dados en lo Ejemplos 3.1.13 y 3.1.16.

Teorema 3.3.3. Si X e Y son A-espacios compactos homeomorfos, entonces $min(X) = min(Y)$.

Demostración. Sea $h : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo. Sea $\{\mathcal{U}_{y_1}, \ldots, \mathcal{U}_{y_{min(Y)}}\}$ un recubrimiento abierto de Y por entornos mínimos.

Entonces $\{\mathcal{U}_{x_1} = h^{-1}(\mathcal{U}_{y_1}), \ldots, \mathcal{U}_{x_{min(Y)}} = h^{-1}(\mathcal{U}_{y_{min(Y)}})\}$, donde $h(x_i) = y_i$ es un recubrimiento abierto de X por entornos mínimos. Por lo tanto, $min(X) \leqslant min(Y)$. Por un razonamiento análogo se llega a la desigualdad contraria, con lo que se prueba el resultado. ■

Como hemos visto en el Teroema 3.2.4, podemos definir un homeomorfismo entre dos A-espacios especificando los homeomorfismos entre los entornos mínimos de los espacios. Esto muestra que los entornos mínimos son un objeto natural de estudio en los A-espacios.

Ahora definiremos otro invariante en A-espacios compactos, basado en ciertos abiertos minimales que satisfacen una condición especial, los cuales recuerdan a las propiedades de descomposicion en factores primos de un entero, por eso, hemos usado el término; abierto mínimo primario.

Definición 3.3.4. Si X es un A-espacio, entonces $\mathcal{U}_x$ se llama primario si dado otro abierto mínimo $\mathcal{U}_y$ con $y \neq x$, se tiene que, o bien $\mathcal{U}_x$ y $\mathcal{U}_y$ son disjuntos, o bien $\mathcal{U}_x$ es el menor abierto minimal contenido en $\mathcal{U}_y$. Es decir para cualquier $\mathcal{U}_z \subset \mathcal{U}_y$ se tiene que $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}_z$.

Gráficamente podemos entender estos conjuntos según se ven en la figura 3.3. Siendo $\mathcal{U}_x$ el menos abierto minimal contenido en el entorno mínimo de y, es decir, no puede existir otro entorno mínimo contenido en $\mathcal{U}_y$ más pequeño que $\mathcal{U}_x$. O bien que para todo $y \neq x$, $\mathcal{U}_x$ no es cortado por ningún $\mathcal{U}_y$-

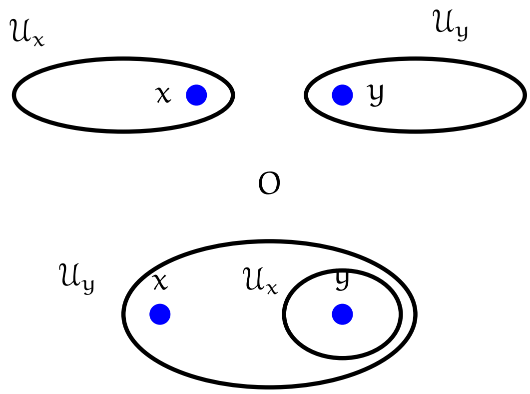


Figura 3.3: *Condiciones de la Definición de primarios.*

Ejemplo 3.3.5.
En el Ejemplo 3.1.14 y 3.1.13, el único conjunto primario es el $\{0\}$. En el Ejemplo 3.1.16, el $\{1\}$. Y en el apartado 3 del Ejemplo 3.1.12, se tiene un número infinito de conjuntos primario, pues cada entorno mínimo es también un conjunto primario.

Teorema 3.3.6. Si $\mathcal{U}_x$ es un subconjunto primario de X, entonces $\mathcal{U}_x$ es irreducible.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}_y \subset \mathcal{U}_x$. Ya que $\mathcal{U}_x$ es primario, si $\mathcal{U}_x$ no está contenido en $\mathcal{U}_y$ debemos tener $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \emptyset$. Esto no puede ser pues $y \in \mathcal{U}_y$ e $y \in \mathcal{U}_x$. Por lo tanto, $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}_y$, que implica $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$. ■

Teniendo en cuenta el Teorema 3.1.24 y el Teorema 3.3.6 se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.3.7. Si $\mathcal{U}_x$ y $\mathcal{U}_y$ son subconjuntos primarios de X, entonces son disjuntos.

Proposición 3.3.8. Si X es un A-espacio, entonces para cada $x \in X$, $\mathcal{U}_x$ contiene como máximo un conjunto primario.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}_x$ contiene dos conjuntos primarios $\mathcal{U}_y$ y $\mathcal{U}_z$, Por la definición de conjunto primario $\mathcal{U}_y \subset \mathcal{U}_z$ y $\mathcal{U}_z \subset \mathcal{U}_y$. Lo que implica que $\mathcal{U}_y = \mathcal{U}_x$. ■

El número de conjuntos primarios de un A-espacio compacto es también un invariante de dicho espacio. Pero, en primer lugar, veamos que siempre existen conjuntos primarios en un A-espacio compacto.

Definición 3.3.9. Si X es un A-espacio compacto, se define $\mathrm{index}(X)$ el número de conjuntos primarios de X.

Ejemplo 3.3.10.
El index de los espacio en el Ejemplo 3.1.14 y en el primer apartado del Ejemplo 3.1.16 es 1.

Teorema 3.3.11. Si X es un A-espacio compacto, entonces $\mathrm{index}(X) \leqslant \min(X)$.

Demostración. Recubramos X por $\{\mathcal{U}_{x_1}, \ldots, \mathcal{U}_{x_{\min(X)}}\}$. Supongamos que $\mathrm{index}(X)$ es mayor que $\min(X)$. Se verifica que cada conjunto primario, $\mathcal{U}_y$, está contenido en $\mathcal{U}_{x_i}$ para algún i. Supongamos que no se verifica esto, entonces, por la definición de primario, $\mathcal{U}_y \cap \mathcal{U}_{x_i} = \emptyset$ para todo i, y la familia $\{\mathcal{U}_{x_i}$ no sería un recubrimiento de X. Esto es un contradicción pues $\mathcal{U}_{x_i}$ recubre X. Por lo tanto, $\mathcal{U}_y \subset \mathcal{U}_{x_i}$ para algún i. Luego si el número de conjuntos primarios de X es mayor que el $\min(X)$, entonces algún $\mathcal{U}_{x_i}$ contiene mas de un conjunto primario, lo que contradice el Proposición 3.3.8.

Teorema 3.3.12. Si X e Y son A-espacios compactos homeomorfos, entonces $\mathrm{index}(X) = \mathrm{index}(Y)$.

Demostración. Sea $h : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo y supongamos que $\mathcal{U}_x$ es un conjunto primario de X. Veamos que $h(\mathcal{U}_x) = \mathcal{V}_{h(x)}$ es un conjunto primario de Y. En efecto $\mathcal{V}_{h(x)} \subset \mathcal{V}_y$ y $\mathcal{V}_z \subset \mathcal{V}_y$, entonces $\mathcal{U}_{h^{-1}(y)} = h^{-1}(\mathcal{V}_y) \supset h^{-1}(\mathcal{V}_z) = \mathcal{U}_{h^{-1}(z)}$ y $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}_{h^{-1}(y)}$. Luego, debemos tener que $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}_{h^{-1}(z)}$ lo que significa $\mathcal{V}_{h(x)} \subset \mathcal{V}_z$.

Si $\mathcal{V}_y$ no contiene a $\mathcal{V}_{h(x)}$, entonces $\mathcal{U}_{h^{-1}(y)}$ no contiene a $\mathcal{U}_x$, lo que implica que $\mathcal{U}_{h^{-1}(y)} \cap \mathcal{U}_x = \emptyset$. Por lo tanto, $\mathcal{V}_y \cap \mathcal{V}_{h(x)} = \emptyset$. Luego $\mathcal{V}_{h(x)}$ es un conjunto primario de Y. Esto muestra que $\mathrm{index}(X) \leqslant \mathrm{index}(Y)$. Por un razonamiento similar se obtiene la desigualdad contraria y así la prueba del Teorema. ■

Podemos preguntarnos si se verifica el recíproco del Teorema 3.3.12. Pero esto no es cierto, pues por el Ejemplo 3.3.10 se ve que ambos espacios tienen index igual a 1 y sin embargo no son homeomorfos. En el Ejemplo 3.1.16 ningún conjunto de la base minimal es homeomorfo a una n-bola euclídea que son los conjuntos de la base minimal de Ejemplo 3.1.14.

3.4. A-ESPACIOS CONEXOS.

En esta sección estudiaremos las propiedades de conexión de los A-espacios. Empezaremos con un resultado que se usará posteriormente en el desarrollo del texto, pero para probarlo necesitamos las definiciones.

Definición 3.4.1. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y dos puntos $x, y \in X$, una cadena simple de x a y es una sucesión finita de subconjutos de X, $A_1, \dots, A_n$ que satisfacen las siguientes condiciones:

1. A_1 (y solo A_1) contiene a x.
2. A_n (y solo A_n) contiene a y.
3. $A_i \cap A_j = \emptyset$ si y solo si $|i - j| > 1$.

Lema 3.4.2. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces:

1. $\{x, y\}$ es conexo si y solo si $y \in \overline{\{x\}}$ o $x \in \overline{\{y\}}$.
2. Si $(X, \mathcal{T})$ es conexo, entonces para cada recubrimiento abierto $\mathcal{B}$ y cualquier par de puntos $x, y \in X$ existe una cadena simple de x a y, formada por elementos de $\mathcal{B}$.

Demostración.

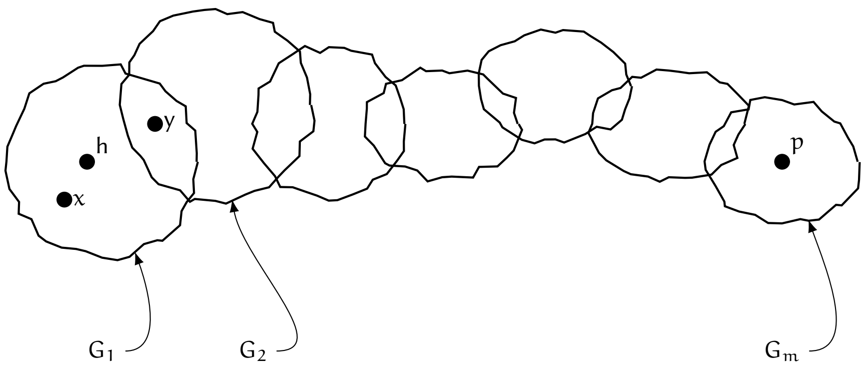
1. Supongamos que $\{x, y\}$ no es conexo. Entonces existe $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ con $O_1' = O_1 \cap \{x, y\}$ y $O_2' = O_2 \cap \{x, y\}$, tales que $O_1' \cap O_2' = \emptyset$ y $\{x, y\} = O_1' \cup O_2'$. Luego $y \notin O_1$ (por ejemplo) y O_1 es un entorno abierto de x en X. Consecuentemente $x \notin \overline{\{y\}}$. De la misma forma $x \notin O_2$, luego O_2 es un entorno abierto de y, por tanto $y \notin \overline{\{x\}}$.

   Recíprocamente sea $\{x, y\}$ conexo y supongamos que $x \notin \overline{\{y\}}$ y que $y \notin \overline{\{x\}}$. Entonces existe un entorno abierto V de x (resp. W de y) tal que $y \notin V$ (resp. $x \notin W$). Luego $\{x, y\} = (V \cap \{x, y\}) \cup (W \cap \{x, y\})$ y $(V \cap \{x, y\}) \cup (W \cap \{x, y\}) = \emptyset$, y por tanto $\{x, y\}$ sería conexo.

2. Sea $p \in X$ y H el conjunto de los puntos de X que pueden unirse con p por una cadena simple compuesta por miembros de $\mathcal{B}$.

   $H \neq \emptyset$, ya que $p \in H$. Veamos que H es abierto y cerrado, y por lo tanto $H = X$ ya que X es conexo.

Sea $h \in H$. Entonces existe $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{B}$ que forma una cadena simple de h a p. Pero si $x \in G_1 \setminus G_2$, entonces $G_1, \ldots, G_n$ forma una cadena simple de x a p; y si $y \in G_1 \cap G_2$, entonces $G_2, \ldots, G_n$ forma una cadena simple de y a p, como indicamos en la siguiente figura.



Así G_1 es un subconjunto de H, es decir, $h \in G_1 \subset H$. Por lo tanto H es un entorno de cada unos de estos puntos, y se tiene que H es abierto.

Ahora sea $g \in H^c$. Ya que $\mathcal{B}$ es un recubrimiento de X, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $g \in V$. Si $V \cap H \neq \emptyset$, existe $h \in V \cap H \subset H$, luego existen $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{B}$ que forman una cadena simple de h a p. Pero entonces, o bien $V, V_k, \ldots, V_m$, donde k es el mayor índice tal que V intersecta a V, o bien , $V_1, \ldots, V_n$ forma una cadena simple de g a p, y por lo tanto $g \in H$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $V \cap H = \emptyset$, y así $g \in V \subset H^c$. Luego H^c es un abierto, y $H^{cc} = H$ es cerrado.

■

Proposición 3.4.3. Si $(X, \mathcal{T})$ es un A-espacio, entonces:

1. $\{x, y\}$ es conexo si y solo si $x \in \mathcal{U}_y$ o $y \in \mathcal{U}_x$.
2. Para todo x, $\mathcal{U}_x$ es conexo por caminos.
3. Si $x \in A \subset \mathcal{U}_x$ entonces A es conexo.
4. Cada componente conexa de $C(x)$ es abierto y cerrado.

Demostración.

1. Es consecuencia del Lema 3.4.2 ya que $x \in \overline{\{y\}}$ si y solo si $y \in \mathcal{U}_x$.

2. Veamos que si $y \in \mathcal{U}_x$, existe un camino de x a y. Para ello, sea

$$\gamma(t) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ y & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

   Veamos que γ es una aplicación continua. Sea $G \in \mathcal{T}$ tal que $G = \mathcal{U}_y \cap O$, con $O \in \mathcal{T}$, se nos presentan las siguientes situaciones:

   a) $G \cap \{x, y\} = \emptyset$ entonces $\gamma^{-1}(G) = \emptyset$.

   b) $\{x, y\} \in G$, en este caso, como $\mathcal{U}_y \subset G$ y además, por hipótesis $x \in \mathcal{U}_y$. Por lo tanto, $\gamma^{-1}(G) = [0, 1]$.

   c) $y \in G$, necesariamente $\mathcal{U}_y \subset G$, por lo que $\gamma^{-1}(G) = [0, 1]$-

   d) $x \in G$, $y \notin G$, en este caso se tendrá que $\mathcal{U}_x \subset G$. Pero, necesariamente, $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{U}_y$, Luego $\gamma^{-1}(G) = [0, 1)$ o $[0, 1]$, según si $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$ o $\mathcal{U}_x \subsetneq \mathcal{U}_y$.

3. Supongamos que $x \in A \subset \mathcal{U}_x$. Entonces $A = \bigcup_{y \in A}\{x, y\}$, y como $\{x, y\}$ es conexo por el apartado 1, A también lo es.

4. Para cada $x \in X$, $\mathcal{U}_x$ es conexo. Por lo tanto $(X, \mathcal{T})$ es localmente conexo, por lo que $C(x)$ es abierto.

■

Corolario 3.4.4. Un A-espacio $(X, \mathcal{T})$ es conexo si y solo si $(X, \mathcal{T})$ es conexo por caminos.

Demostración. Basta tener en cuenta que $\mathcal{U}_x$ es conexo por caminos y la Proposición 1.1.33.

El siguiente resultado recoge las distintas formas equivalentes entre sí de expresar la conexión de un A-espacio.

Teorema 3.4.5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un A-espacio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. X es conexo por caminos.

2. X es conexo.

3. Si $\mathcal{B}$ es un recubrimiento abierto de X, para todo par x, y existe una cadena simple de x a y.

4. Para todo $a, b \in X$, existe $a_0, \dots, a_{n+1} \in X$ tal que $a_0 = a$, $a_{n+1} = b$, y $\mathcal{U}_{a_i} \cap \mathcal{U}_{a_j} \neq \emptyset$ si $|i - j| \leqslant 1$.

5. Para todo $a, b \in X$, existe $a_0, \dots, a_{n+1} \in X$ tal que $a_0 = a$, $a_{n+1} = b$, y $\overline{\mathcal{U}_{a_i}} \cap \overline{\mathcal{U}_{a_j}} \neq \emptyset$ si $|i - j| \leqslant 1$.

6. Para todo $a, b \in X$, existe $a_0, \dots, a_{n+1} \in X$ tal que $a_0 = a$, $a_{n+1} = b$ y $\overline{\{a_i\}} \cap \overline{\{a_j\}} \neq \emptyset$ si $|i - j| \leqslant 1$.

Demostración. Las condiciones $1 \implies 2 \implies 3$ son válidas en cualquier espació topológico, y aplicando el tercer apartado al recubrimiento abierto $\{\mathcal{U}_x\}_{x \in X}$ se obtiene 4. Es evidente que $4 \implies 5$. Veamos $5 \implies 6$, dados $a, b \in X$ sean $a_1, \dots, a_n \in X$ satisfaciendo que $\overline{\mathcal{U}_{a_i}} \cap \overline{\mathcal{U}_{a_j}}$ si $|i - j| \leqslant 1$. Si $z_i \in \overline{\mathcal{U}_{a_i}} \cap \overline{\mathcal{U}_{a_{i+1}}}$, existen $w_i \in \overline{\mathcal{U}_z} \cap \overline{\mathcal{U}_{a_i}}$ y $w_i' \in \overline{\mathcal{U}_{a_i}} \cap \overline{\mathcal{U}_{a_{i+1}}}$.

Consideramos la sucesión

$$a_0, w_1, z_1, w_1', a_2, w_2, z_2, w_2', \dots, a_{n-1}, w_{n-1}, z_{n-1}, w_{n-1}', a_n,$$

entonces $a_0 \in \overline{\{w_1\}}$, pues $w_1 \in \mathcal{U}_{a_0}$, $z \in \overline{\{w_1\}}\ cap \overline{\{w_1'\}}$ pues $w_1, w_1' \in \mathcal{U}_x$, $a_2 \in \overline{\{w_1'\}}$, pues $w_1' \in \mathcal{U}_{a_2}$, etc... Es decir, las clausuras de dos puntos consecutivos de la sucesión se cortan.

Por último, veamos que $6 \implies 1$. Dados $x, y \in X$ veamos que existe un camino γ de x a y. Pero si $a_0 = x, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, y$ es una sucesión dada por el sexto apartado, sea $z_i \in \overline{\{a_i\}} \cap \overline{\{a_{i+1}\}}$. Entonces, $a_i, a_{i+1} \in \mathcal{U}_{z_i}$, y como $\mathcal{U}_{z_i}$ es conexo por caminos, existe un camino γ_i de a_i a a_{i+1}. Por tanto, $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1}$ es un camino de x a y. ■

Ejemplo 3.4.6.
El espacio de Khalimsky $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_K)$ es conexo, y por lo tanto conexo por caminos por el Lema 3.4.2.

Proposición 3.4.7. Sea X un A-espacio. Si existe un punto $x \in X$ tal que $\mathcal{U}_x$ es a la vez el maximal y el minimal en $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_y | y \in X\}$, entonces $\mathcal{U}_x$ es un abierto y cerrado, y X es disconexo.

Demostración. Basta probar que $\mathcal{U}_x$ es cerrado, o de forma equivalente, que $\overline{\mathcal{U}_x} = \mathcal{U}_x$. Supongamos que $y \in \overline{\mathcal{U}_x}$. Entonces teniendo en cuenta la Proposición 3.1.4 existe $z \in \mathcal{U}_x$ tal que $y \in \overline{\{z\}}$.Por tanto $\mathcal{U}_z \subseteq \mathcal{U}_x$ y $\mathcal{U}_z \subseteq \mathcal{U}_y$. Ya que $\mathcal{U}_x$ es minimal, tenemos que $\mathcal{U}_z = \mathcal{U}_x$, y así $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_y$ que por ser maximal. Por lo tanto $y \in \mathcal{U}_x$. ■

3.5. Generación de A-topologías.

En esta sección se comprueba que dado cualquier espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se puede obtener una topología más fina que es de Alexandroff, cuyos conjuntos binarios conexos son los mismos que los de $\mathcal{T}$.

Lema 3.5.1. Sea X un conjunto y $\phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ cumpliendo:

1. $x \in \phi(x)$.
2. $y \in \phi(x) \Longrightarrow \phi(y) \subset \phi(x)$.

Entonces existe una A-topología $\mathcal{T}_\phi$ sobre X. Tal que $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}_\phi} = \phi(x)$.

Demostración. Sea $\mathcal{T}_\phi = \{O \subset X;\ \phi(x) \subset O \text{ para todo } x \in O\}$. Veamos que es una topología de Alexandroff, para ello es suficiente probar que si $\{O_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos de $\mathcal{T}_\phi$ entonces $\cup O_i \in \mathcal{T}_\phi$ y que $\cap O_i \in \mathcal{T}_\phi$.

1. $\cap O_i \in \mathcal{T}_\phi$ si $O_i \in \mathcal{T}$ si $\phi(x) \subset O_i \Longrightarrow \phi(x) \subset \cap O_i$.
2. $\cup O_i \in \mathcal{T}_\phi$ si $x \in \cup O_i \Longrightarrow \phi(x) \subset O_i \subset \cup O_i$.

Veamos que $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}_\phi} = \phi(x)$:

1. $x \in \phi(x)$ por la condición 1 de ϕ.
2. Además $\phi(x) \in \mathcal{T}_\phi$, supongamos que $y \in \phi(x)$ entonces $\phi(y) \subset \phi(x)$ por la propiedad 2 de ϕ.

3. $\phi(x)$ es el menor abierto que contiene a x, por la definición de $\mathcal{T}_\phi$.

Teorema 3.5.2. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ existe una topología sobre X, denotada por $\mathcal{AT}$ y llamada A-topología generada por $\mathcal{T}$, que es más fina que $\mathcal{T}$ y verifica que:

1. $\mathcal{AT} = \inf\{\mathcal{T}' : \mathcal{T}' \text{ es una A-topología sobre } X \text{ y } \mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}'\}$.
2. $\overline{\{x\}}^{\mathcal{T}} = \overline{\{x\}}^{\mathcal{AT}}$ para todo $x \in X$.
3. $\mathcal{T}$ es T_0 si y solo $\mathcal{AT}$ es T_0.
4. $\{x, y\}$ es conexo en $(X, \mathcal{T})$ si y solo si lo es en $(X, \mathcal{AT})$.

Demostración. Sea $\phi_{\mathcal{T}} : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ la aplicación dada por $\phi_{\mathcal{T}}(x) = \cap\{V, V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \cap \mathcal{T}\}$. Veamos que $\phi_{\mathcal{T}}$ satisface las condiciones del Lema 3.5.1. La primera condición es obvia, y si $y \in \phi_{\mathcal{T}}(x)$ hay que probar que $\phi_{\mathcal{T}}(y) \subset \phi_{\mathcal{T}}(x)$, es decir que

$$\cap\{N;\ N \in \mathcal{N}_y^{\mathcal{T}}\} \subset \cap\{W :\ W \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}\}.$$

Sea pues $t \in \phi_{\mathcal{T}}(y)$ y $W \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$. Por hipótesis, $y \in W$, luego $t \in W$.

1. $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}'\}$ porque si $O \in \mathcal{T}$ entonces $O \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ para todo $x \in O$, luego $\phi_{\mathcal{T}}(x) \subset O$, y por tanto $O \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{AT}}$, es decir $O \in \mathcal{AT}$.

   Por otra parte si $\mathcal{T}_1$ es una A-topología sobre X con $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_1$, veamos que $\mathcal{AT} \leqslant \mathcal{T}_1$. Para ello, bastaría probar que para todo $x \in X$, $\phi_{\mathcal{T}}(x) \in \mathcal{T}$. Ahora bien, $\phi_{\mathcal{T}}(x) = \cap\{V;\ V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}\}$, y como $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_1$ es una A-topología se tiene el resultado.

2. Para probar que $\overline{\{x\}}^{\mathcal{T}} = \overline{\{x\}}^{\mathcal{AT}}$, basta tener en cuenta que $y \in \{x\}^{\mathcal{T}}$ si y solo si $x \in \phi_{\mathcal{T}}(y) = \mathcal{U}_y$, lo que es equivalente por

3. Se cumple que si $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}$ es T_0 entonces $\mathcal{T}_1$ también lo es. Supongamos que $\mathcal{T}_1$ es T_0, entonces si $x \neq y$, entonces por se tiene que $y \notin \mathcal{U}_x^{\mathcal{AT}}$ o $x \notin \mathcal{U}_x^{\mathcal{AT}}$. Supongamos que $y \notin \mathcal{U}_x^{\mathcal{AT}} = \phi_{\mathcal{T}}(x)$. Entonces por definición de $\phi_{\mathcal{T}}(x)$, existe $V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}} \cap \mathcal{T}$ tal que $y \notin V$.

4. Como $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{AT}$, si $\{x, y\}$ es conexo en $(X, \mathcal{AT})$ lo es en $\mathcal{T}$. Recíprocamente supongamos que $\{x, y\}$ no es conexo en $\mathcal{AT}$, por $x \notin \overline{\{y\}}^{\mathcal{AT}} = \overline{\{y\}}^{\mathcal{T}}$ y $x \notin \overline{\{y\}}^{\mathcal{AT}} = \overline{\{x\}}^{\mathcal{T}}$, luego de nuevo por $\{x, y\}$ no es conexo en $\mathcal{T}$.

■

Nota 3.5.3. Obsérvese que:

1. $\mathcal{T}$ es T_0 si y solo si la aplicación $\phi_{\mathcal{T}}$ es inyectiva.

2. $\mathcal{AT}$ tiene menos conjuntos conexos que $\mathcal{T}$. Por ejemplo si $\mathcal{T}$ es la topología usual en $\mathbb{R}$, entonces $\mathcal{AT}$ es la topología discreta.

3. El Teorema 3.5.2 es de interés si el espacio $(X, \mathcal{T})$ es a lo sumo T_0. En efecto, ya que si fuese T_1, $\mathcal{AT}$ también lo sería por la propiedad 4 del Teorema 3.5.2. Y por tanto $\mathcal{AT}$ sería la discreta.

En el siguiente Teorema se prueba que si $(X, \mathcal{T})$ es un A-espacio, entonces $\mathcal{T}$ puede .ªmpliarse.ª una topología $\mathcal{T}'$ que sigue siendo una A-topología que tiene los mismos subconjuntos conexos que $\mathcal{T}$, pero que es T_0. La idea de la demostraciín consiste en añadir conjuntos a la familia de entornos de cada punto, de manera que se obtengan entornos mínimos más pequeños. Para que de este modo sea más fácil que dados dos puntos al menos uno de ellos esté en el entorno mínimo del otro.

Aunque la demostración es válida cualquiera que sea el cardinal de $|X|$, se supondrá que X es numerable para seguirla con más comodidad.

Teorema 3.5.4. Si $(X, \mathcal{T})$ es un A-espacio, existe una topología $\mathcal{T}'$ sobre X tal que

1. $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}'$ y $(X, \mathcal{T}')$ es un A-espacio.

2. $\mathcal{T}'$ y $\mathcal{T}$ tienen los mismos subconjuntos conexos.

3. $\mathcal{T}'$ es minimal en el conjunto de las topologías sobre X que satisfacen 1 y 2.

Demostración. Sea $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $\mathcal{U}_n$ es el entorno mínimo de x_n en $\mathcal{T}$. Sean $\phi_{\mathcal{T}} : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ la aplicación dada por $\phi_{\mathcal{T}}(x_n) = \mathcal{U}_n$. Para cada $V\ subsetX$ consideremos $\phi_{\mathcal{T}}(V) = \{x \in X;\ \phi_{\mathcal{T}}(x) = V\}$. Es decir $\phi_{\mathcal{T}}^{-1}$ es el conjunto de puntos de X cuyo entorno mínimo es V.

Se tiene que $\{\phi_{\mathcal{T}}^{-1}(V);\ V \in \mathcal{P}(X)\}$ es una partición de X , y se trata ahora de definir una aplicación $\phi'_{\mathcal{T}} : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ que satisfaga las mismas condiciones del Lema 3.5.1.

1. Si $\phi_{\mathcal{T}}^{-1}(V) = \{x\}$, se toma $\phi'_{\mathcal{T}}(x) = V$. Es decir, si existe un único punto x cuyo entorno mínimo es V, dicho entorno no se reduce.
2. Si $|\phi_{\mathcal{T}}^{-1}(V)| \geqslant 2$, y $x_{n(V)}$ es el primer elemento de V, se toma $\phi'_{\mathcal{T}}(x_{n(V)}) = V$, y para los sucesivos elementos de $\phi_{\mathcal{T}}^{-1}(V)$ ordenados de forma creciente según sus indices se toma $\phi'_{\mathcal{T}}(x_j) = V \setminus \{x_i;\ i < j\}$.

Nótese que el efecto de esta construcción es sustituir la sucesión de entornos mínimo de $\mathcal{T}$ por otra en la que no haya dos puntos distintos con los mismos entornos mínimos.

Veamos que $\phi'_{\mathcal{T}}$ satisface las condiciones del Lema 3.5.1.

Es evidente que $x_i \in \phi_{\mathcal{T}}(x_i)$. Por otra parte, si $x_i \in \phi'_{\mathcal{T}}(x_j)$, o bien $\phi'_{\mathcal{T}}(x_j) = \phi_{\mathcal{T}}(x_j) = V$, y se tendría que $\phi'_{\mathcal{T}}(x_i) \subset \phi_{\mathcal{T}}(x_i) \subset \phi_{\mathcal{T}}(x_j) = \phi'_{\mathcal{T}}(x_j)$, o bien $\phi'_{\mathcal{T}}(x_j) \subsetneq \phi_{\mathcal{T}}(x_j) = V$, con $\phi'_{\mathcal{T}}(x_i) = V \setminus \{x_r;\ r < j\}$, y sería $i \geqslant j$, por lo que $\phi'_{\mathcal{T}}(x) = \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}'}$. $\phi'_{\mathcal{T}}(x_i) = V\setminus\{x_l;\ l < i\} \subset V \setminus \{x_k;\ k < j\} = \phi'_{\mathcal{T}}(x_j)$.

Por tanto, $\phi'_{\mathcal{T}}$ general una A-topología $\mathcal{T}' \geqslant \mathcal{T}$. $(X, \mathcal{T})$ es T_0, pues si $x \neq y$ pueden ocurrir dos casos:

1. $\mathcal{U}_x \neq \mathcal{U}_y$ y entonces $x \notin \mathcal{U}_y$ o $ynotin\mathcal{U}_x$ por lo que $x \notin \mathcal{N}_y^{\mathcal{T}'}$ o $y \notin \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}'}$.
2. Si $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y = V$ entonces $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}'} = V \setminus \{t;\ t < x\}$ y $\mathcal{N}_y^{\mathcal{T}'} = V \setminus \{t;\ t < y\}$. Como $x < y$ o $y < x$, $y \notin \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}'}$ o $x \notin \mathcal{N}_y^{\mathcal{T}'}$.

Veamos que un conjunto es conexo en $(X, \mathcal{T})$ si y solo si los es en $(X, \mathcal{T}')$. Por ser $\mathcal{T}' \geqslant \mathcal{T}$, todo subconjunto conexo de $\mathcal{T}'$ lo es en $\mathcal{T}$. Para probar el recíproco, se prueba primero que es cierto para subconjuntos binarios. Pero si $\{x, y\}$ es conexo para $\mathcal{T}$, por $y \in \mathcal{U}_x$ o $x \in \mathcal{U}_y$. Supongamos que $y \in \mathcal{U}_x$, pueden darse dos casos:

1. Si $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}'} = \mathcal{U}_x$, entonces $\{x, y\}$ es conexo en $\mathcal{T}'$.
2. Si $\mathcal{N}_x^{\mathcal{T}'} \subsetneq \mathcal{U}_x = V$ e $y \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}'}$, entonces $\{x, y\}$ es conexo en $\mathcal{T}'$. Si $y \notin \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}'}$, entonces $y < x$ y por tanto $x \in \mathcal{N}_y^{\mathcal{T}'}$ por lo que $\{x, y\}$ es conexo para $\mathcal{T}'$.

Si C es un conjunto conexo de $\mathcal{T}$ y $x \in C$, dado $y \in C$ por (2) de podemos suponer que $y \in \mathcal{U}_x$. Entonces, por ser C conexo por caminos, existe un camino γ en C con , luego $\{x, y\}$ es conexo en $\mathcal{T}$ y por tanto en $\mathcal{T}'$. De nuevo por se tendría que C es conexo en $\mathcal{T}'$. ■

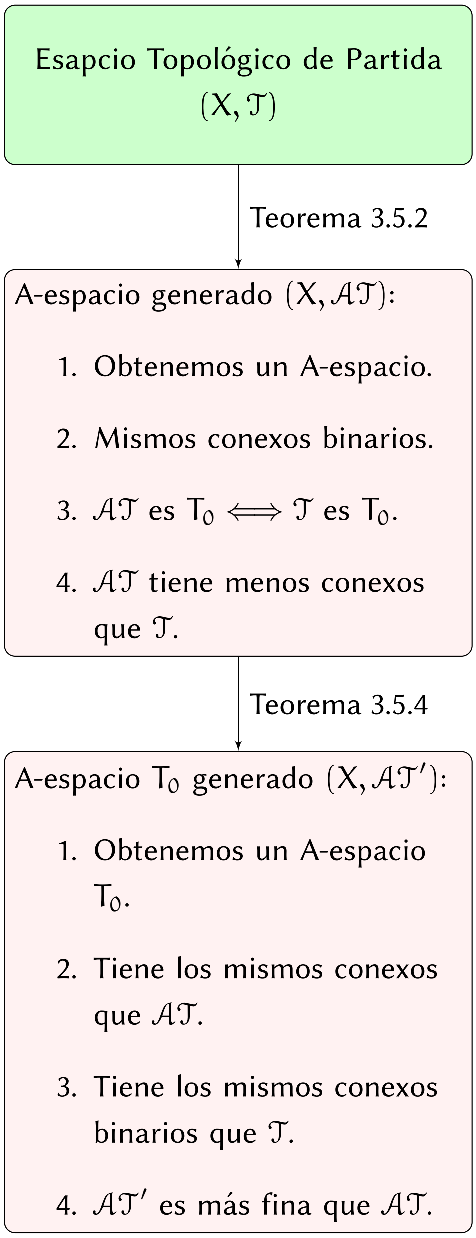
Proposición 3.5.5. $\mathcal{T}$ es T_0 si y solo $\mathcal{A}\mathcal{T}$ es T_0 si y solo si la aplicación $\phi_{\mathcal{U}}$ es inyectiva.

Demostración. Si $y \in \mathcal{U}_x$ entonces para todo $V \in \mathcal{V}_{\mathcal{T},x}$, $y \in V$. $\mathcal{T}$ siendo T_0 existe $W \in \mathcal{V}_y$ tal que $x \notin W$, y por lo tanto $x \notin \mathcal{U}_y$. ■

Nota 3.5.6. En el siguiente diagrama analizaremos cual es el efecto de la aplicación sucesiva de los dos Teoremas anteriores:

1. Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio T_0 (not T_1). Al aplicar el Teorema 3.5.2, se obtiene el espacio $(X, \mathcal{A}\mathcal{T})$ que es un A-espacio T_0, luego cuando aplicamos el Teorema 3.5.4 obtenemos el espacio $(X, (\mathcal{A}\mathcal{T})')$ pero por la construcción de $(\mathcal{A}\mathcal{T})'$, se tiene que $(\mathcal{A}\mathcal{T})' = \mathcal{A}\mathcal{T}$.
2. Para el caso en que $(X, \mathcal{T})$ sea un A-espacio no T_0, si se aplica el Teorema 3.5.2 no se obtiene mejora y $\mathcal{A}\mathcal{T} = \mathcal{T}$, ya que se introducen las intersecciones arbitrarias de los abiertos y no esto no seria añadir nada pues $(X, \mathcal{T})$ es un A-espacio. Y aplicando el Teorema 3.5.4 se amplía la topología $\mathcal{T}$ para conseguir una que sea T_0.
3. Si $(X, \mathcal{T})$ es un A-espacio T_0, y le aplicamos el Teorema 3.5.2 por construcción de $\mathcal{A}\mathcal{T}$ se tiene que $\mathcal{T} = \mathcal{A}\mathcal{T}$. Además se conserva la propiedad de T_0. Ocurriría lo mismo al aplicar el Teorema 3.5.4.

Nota 3.5.7.



1. Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio T_0 (not T_1). Al aplicar el Teorema 3.5.2, se obtiene el espacio $(X, \mathcal{A}\mathcal{T})$ que es un A-espacio T_0, luego cuando aplicamos el Teorema 3.5.4 obtenemos el espacio $(X, (\mathcal{A}\mathcal{T})')$ pero por la construcción de $(\mathcal{A}\mathcal{T})'$, se tiene que $(\mathcal{A}\mathcal{T})' = \mathcal{A}\mathcal{T}$.

2. Para el caso en que $(X, \mathcal{T})$ sea un A-espacio no T_0, si se aplica el Teorema 3.5.2 no se obtiene mejora y $\mathcal{A}\mathcal{T} = \mathcal{T}$, ya que se introducen las intersecciones arbitrarias de los abiertos y no esto no seria añadir nada pues $(X, \mathcal{T})$ es un A-espacio. Y aplicando el Teorema 3.5.4 se amplía la topología $\mathcal{T}$ para conseguir una que sea T_0.

3. Si $(X, \mathcal{T})$ es un A-espacio T_0, y le aplicamos el Teorema 3.5.2 por construcción de $\mathcal{A}\mathcal{T}$ se tiene que $\mathcal{T} = \mathcal{A}\mathcal{T}$. Además se conserva la propiedad de T_0. Ocurriría lo mismo al aplicar el Teorema 3.5.4.

Proposición 3.5.8. Sea $(X, \mathcal{T})$ un A-espacio T_0, $\mathcal{T}$ es maximal en el conjunto de las topologías en X para el cual los conjuntos conexos son los mismos que para $\mathcal{T}$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{T} < \mathcal{T}'$, existe un conjunto abierto U de $\mathcal{T}'$ que no es un abierto para $\mathcal{T}$. Luego existe $x \in X$ tal que $U \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}',x}$ y $U \notin \mathcal{V}_{\mathcal{T},x}$. Por lo tanto $\mathcal{U}_x \nsubseteq U$ y existe $y \in \mathcal{U}_x$ tal que $y \notin U$, $\{x, y\}$ es conexo para $\mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ es un espacio T_0. así $x \notin \mathcal{U}_y$ lo que significa que $y \notin \overline{x}_{\mathcal{T}}$, por consiguiente $y \notin \overline{x}_{\mathcal{T}'}$. Más aún $y \notin U$ implica $x \notin \overline{y}_{\mathcal{T}'}$ por lo tanto $\{x, y\}$ no es un conjunto conexo para $\mathcal{T}'$. ∎

4

Espacios de Alexandroff y Conjuntos Parcialmente Ordenados.

Recordemos (ver Teorema 2.4.1 y Proposición 2.4.4) que dado un conjunto (pre)ordenado $(X, \leqslant)$ el conjunto $\mathcal{B} = \{\uparrow x : x \in X\}$ es base para una topología, denotada por $\mathcal{T}(\leqslant)$ y que dicha topología es T_0 si y solo si $(X, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado

Teorema 4.0.1. Si X es un A-espacio T_0, entonces $\uparrow x$ es compacto para todo $x \in X$.

Demostración. Sea $\{G_i : i \in I\}$ un recubrimiento abierto de $\uparrow x$. Entonces x está en G_i para algún $i \in I$. Así debemos tener que $\uparrow x \subseteq G_i$. Por lo tanto G_i es un subrecubrimiento finito de $\{G_i : i \in I\}$. ■

Teorema 4.0.2. Sean X e Y A-espacios T_0 entonces $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua si y solo si $f(\downarrow x) \subset \downarrow f(x)$ para todo $x \in X$.

Demostración. Supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es continua, y sea $x \in X$. Ya que $\downarrow f(x)$ es cerrado, contiene a $f(x)$, entonces, por continuidad de f, tenemos que $f^{-1}(\downarrow f(x))$ es cerrado y contiene a x. Pero $\downarrow x$ es el cerrado mas pequeño que contiene a x por lo tanto $\downarrow x \subseteq f^{-1}(\downarrow f(x))$, por lo tanto $f(\downarrow x) \subseteq \downarrow f(x)$.

Recíprocamente, supongamos para cada $x \in X$ que $f(\downarrow x) \subset \downarrow f(x)$, y sea $C = \downarrow f(x)$ cualquier conjunto cerrado conteniendo $f(x)$ en Y. Sea A cualquier conjunto de X. Fijamos $A = f^{-1}(C)$, veamos que A es cerrado, o equivalentemente, que $\downarrow A = A$. Luego

$$f(\downarrow A) = f(\downarrow f^{-1}(C)) = f(\downarrow f^{-1}(\downarrow (f(x))))$$

Y se tiene que

$$f(\downarrow f^{-1}(\downarrow (f(x)))) \subseteq \downarrow f(f^{-1}(\downarrow (f(x)))) = \downarrow f(x) = C.$$

Por lo tanto $\downarrow A \subseteq f^{-1}(C) = A$, pero $A \subseteq \downarrow A$, por lo tanto $A = \downarrow A$ que implica que f es continua. ■

Teorema 4.0.3. Sean X e Y A-espacios T_0 entonces $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua si y solo si $f(\uparrow x) \subset \uparrow f(x)$ para todo $x \in X$.

Demostración. La prueba es equivalente a la del Teorema 4.0.2 anterior.

Proposición 4.0.4. $(X, \mathcal{T}(\leqslant))$ es un A-espacio T_0.

Demostración. Recodemos que la base de $\mathcal{T}(\leqslant)$ es la familia $\mathcal{B} = \{\uparrow x : x \in X\}$, donde $\uparrow x = \{y \in X : x \leqslant y\}$.

Que es T_0, es directo por la Proposición 2.4.4. Queda ver que esta topología es de Alexandroff, para ello veamos que la intersección arbitraria de elementos de $\mathcal{B}$ es un elemento de $\mathcal{B}$, pero esto es inmediato, por la propia definición de los conjuntos $\uparrow x$ y se verifica la igualdad.

$$\bigcap_{b \leqslant a} \uparrow b = \uparrow a, \; a \in X, \text{ y para todo } b \in X.$$

■

Proposición 4.0.5. Sea $(X, \leqslant)$ un conjunto parcialmente ordenado, entonces $B = \{\uparrow x : x \in X\}$ es base minimal.

Demostración. En efecto, para cada $x \in X$, el conjunto $\uparrow x = G$ donde $G = \cap\{U \in \mathcal{T}, x \in U\}$, esto es cierto, pues por el Teorema y la nota anterior, tenemos que $x \in \uparrow x \subseteq G$. Por otro lado, ya que $\uparrow x$ es abierto, esto implica que $G \subseteq \uparrow x$. Entonces tenemos que $B = \{\uparrow x : x \in X\}$ es una base minimal. ■

Nota 4.0.6. Sea $(X, \mathcal{T})$ un A-espacio, denotaremos al preorden de especialización con $\leqslant_{\mathcal{T}}$. Es decir, $a \leqslant_{\mathcal{T}} b$ si y solo si $a \in \overline{\{b\}}$.

Lema 4.0.7. Sea $(X, \mathcal{T})$ un A-espacio T_0 y $\leqslant_{\mathcal{T}}$ es el orden de especialización, entonces $x \leqslant_{\mathcal{T}} y$ si y solo si $y \in \mathcal{U}_x$.

Demostración. Supongamos que $x \leqslant_{\mathcal{T}} y$ luego $y \in \mathcal{U}_x$, entonces $\mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{U}_x$. Recíprocamente, supongamos que $y \in \mathcal{U}_x$, con $x \neq y$ (en el que caso de que sean iguales es trivial). Entonces como X es un A-espacio y por ser $\mathcal{U}_x$ es entorno mínimo de x, tenemos que $x \notin \mathcal{U}_y$ luego, por ser T_0 y ya que $x \neq y$, $\mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{U}_x$ y por definición de orden de especialización, se tiene que $x \leqslant_{\mathcal{T}} y$. ■

Nota 4.0.8. Partir de que $\mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{U}_x$ y decir, que por definición de orden de especialización se tiene que $x \leqslant_{\mathcal{T}} y$. Es porque decir que si $x \in \overline{\{y\}}$ implica que todo abierto de $\mathcal{T}$ que contenga a x también contiene a y, en particular, el abierto $\mathcal{U}_x$ contiene a y.

Como ya se indicó en el Capítulo 2, se verifica que en un conjunto preordenado $(X, \leqslant)$, se tiene que $\leqslant_{\mathcal{T}(\leqslant)} = \leqslant$ es decir que el orden de especialización asociado a la topología que general $\leqslant$ coincide con él. Como vimos en el Ejemplo 2.4.8 la igualdad $\mathcal{T}(\leqslant_{\mathcal{T}}) = \mathcal{T}$ no tiene porqué verificarse en cualquier espacio topológico, pero en los A-espacios si se cumple esta igualdad.

Teorema 4.0.9. Si $(X, \mathcal{T})$ es un A-espacio T_0 y si $\leqslant_{\mathcal{T}}$ es el orden de especialización, entonces la topología inducida por el orden de especialización es la topología $\mathcal{T}$, es decir $\mathcal{T}(\leqslant_{\mathcal{T}}) = \mathcal{T}$.

Demostración. Basta comprobar que las bases de ambas topologías $\mathcal{B} = \{\mathcal{U}_x\}_{x \in X}$ y $\mathcal{B}' = \{\uparrow x : x \in X\}$ cumplen las condiciones de la Proposición 1.1.9. De hecho, son iguales, pues se tiene que $x \leqslant_{\mathcal{T}} y$ si y solo si $y \in \mathcal{U}_x$, por el Lema 4.0.7. Por lo tanto $\uparrow x = \mathcal{U}_x$, donde $\uparrow x = \{y \in X : x \leqslant_{\mathcal{T}} y\}$.

Nota 4.0.10. Teniendo en cuenta el Teorema 4.0.9 no se hará distinción entre los abiertos de la topología inicial, y los abiertos de la topología dada por el orden de especialización en un A-espacio. Si $(X, \mathcal{T})$ es un A-espacio, por el Teorema 4.0.9 y la Proposición 2.4.2 afirmar que un conjunto es abierto en topología inicial será equivalente a decir que $A = \uparrow A$, considerando el orden de especialización $\leqslant_{\mathcal{T}}$.

Teorema 4.0.11. Sea $(X, \mathcal{T})$ un A-espacio T_0, y sea $A \subseteq X$. Entonces

1. Para cualquier $x \in X$, $\overline{\{x\}} = \downarrow x$.

2. $\mathrm{int}\{A\} = \{x \in A : \uparrow x \subseteq A\}$.

3. $\overline{A} = \bigcup_{x\in A} \downarrow x$.

4. $A' = \{x \in \overline{A} :$ existe $y \in A$ con $x < y\}$.

Demostración.

1. $\downarrow x$ es un conjunto inferior y por lo tanto un cerrado que contiene a x. Así $\overline{\{x\}} \subseteq \downarrow x$.

   Recíprocamente, supongamos que $y \in \downarrow x$, luego, si $y \in (\overline{\{x\}})^c$, que es un abierto, entonces $\uparrow y \cap \overline{\{x\}} = \emptyset$. Ya que $x \in \uparrow y$, tenemos que $x \notin \overline{\{x\}}$, que es una contradicción. Por lo tanto $y \in \overline{\{x\}}$, y tenemos que $\downarrow x \subseteq \overline{\{x\}}$. Así pues se tiene que $x \in X$, $\overline{\{x\}} = \downarrow x$.

2. Si $x \in \{x \in A : \uparrow x \subseteq A\}$. Así, $\uparrow x \subseteq A$. Pero $\uparrow x$ es un abierto, por lo tanto, $\uparrow x \subseteq \mathrm{int}\{A\}$. Recíprocamente, sea $y \in \mathrm{int}\{A\} \subseteq A$. Entonces existe un abierto U de X tal que $y \in U \subseteq A$. Pero $\uparrow y$ es el conjunto mas pequeño que contiene a y. Por lo tanto $y \in \{x \in A : \uparrow x \subseteq A\}$.

3. Si $x \in A$, entonces $\overline{\{x\}} = \downarrow x \subseteq \overline{A}$, así que $\bigcup_{x\in A} \downarrow x \subseteq \overline{A}$. Por otro lado, si $x \in A$, entonces $x \in \downarrow x \subseteq \cup_{x\in A} \downarrow x$. Así pues $A \subseteq \cup_{x\in A} \downarrow x$, que es cerrado, por lo tanto $\overline{A} \subseteq \cup_{x\in A} \downarrow x$.

4. Se tiene la siguiente cadena de equivalencias, $x \in A' \iff$ todo abierto U que contiene a x se tiene que $U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset \iff \uparrow x \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset \iff$ existe $y \in A$, con $x < y \iff x \in \overline{A}$ y existe $y \in A$ con $x < y$.

■

Ejemplo 4.0.12.
Consideremos el conjunto parcialmente ordenado X con el orden parcial mostrado en la figura 4.1.

Así el espacio $(X, \mathcal{T}(\leqslant))$ es un A-espacio T_0, entonces:

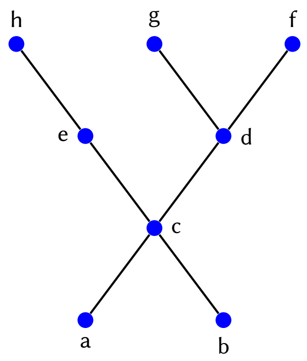


Figura 4.1: *Conjunto parcialmente ordenado* $(X, \leqslant)$

1. $\mathrm{int}\{A\} = \uparrow f = \{f\}$.
2. $\overline{A} = \downarrow f \cup \downarrow e = \{a, b, c, d, e, f\}$.
3. $A' = x \in \{\overline{A} :$ existe $y \in A$ con $x < y\} = \{a, b, c, d\}$.

Teorema 4.0.13. Sea $(X, \mathcal{T}(\leqslant_1))$ y $(Y, \mathcal{T}(\leqslant_2))$ dos A-espacios T_0 con sus correspondientes conjuntos parcialmente ordenados $(X, \leqslant_1)$ y $(Y, \leqslant_2)$ respectivamente. Entonces el orden de especialización $\leqslant_p$ de el A-espacio T_0 $X \times Y$ coincide con el orden inducido por el producto de los correspondientes conjuntos parcialmente ordenados.

Demostración. Vamos a usar el hecho que en un A-espacio T_0, $x \leqslant y$ si y solo si $y \in \mathcal{U}_x$. Ahora $(a, b) \leqslant_p (c, d)$ si y solo si $(c, d) \in \mathcal{U}_{(a,b)} = \mathcal{U}_a \times \mathcal{U}_b$ si y solo si $c \in \mathcal{V}_a$ y $d \in \mathcal{U}_b$ si y solo si verifican que $a \leqslant_1 c$ y $b \leqslant_2 d$. ■

Ejemplo 4.0.14.
Dado $a \to c$ en X y $b \to d$ en Y, obtenemos 4 puntos en $X \times Y$, (a, b), (a, d), (c, b) y (c, d). Entonces tenemos que $(a, b) \to (a, d) \to (c, d)$, $(a, b) \to (c, d) \to (c, d)$ y (a, d) es incomparable con (c, b) (ver figura 4.2).

4.1. Topología Dual de Alexandroff.

Definición 4.1.1. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ consideremos la familia

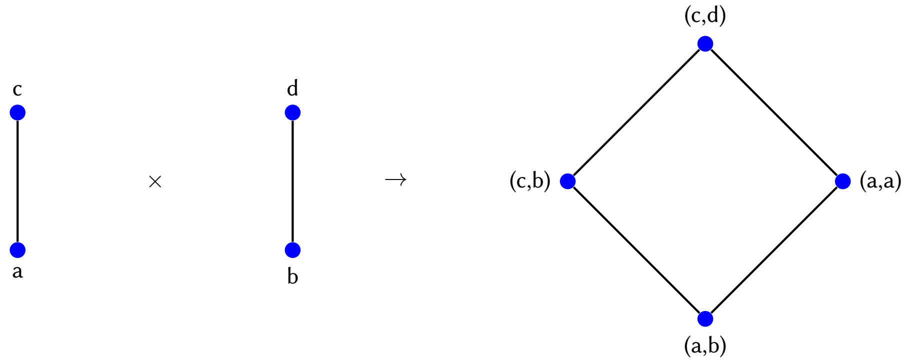


Figura 4.2: *Producto de* X.

$$\mathcal{T}^{\sim} = \{O \subset X;\ X \setminus O \in \mathcal{T}\}.$$

Esta familia en general no es una topología. Cuando lo sea se llamará topología dual de $\mathcal{T}$. Nótese que si $\mathcal{T}^{\sim}$ es topología, los abiertos de $\mathcal{T}^{sim}$ son los cerrados de $\mathcal{T}$ y viceversa.

Veamos cuando esta familia verifica las condiciones para ser una topología sobre X. Pera ello, es condición necesaria que $(X, \mathcal{T})$ la intersección arbitraria de conjuntos de $\mathcal{T}$ pertenezca a $\mathcal{T}$, es decir, que $\mathcal{T}$ sea de Alexandroff.

Proposición 4.1.2. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, entonces $(X, \mathcal{T}^{\sim})$ es una topología si y solo si $\mathcal{T}$ es de Alexandroff.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{T}$ es una topología de Alexandroff, es trivial que $\emptyset$ y $X \in \mathcal{T}^{sim}$ y que la intersección dos abiertos de $\mathcal{T}^{\sim}$ pertenece a $\mathcal{T}^{\sim}$. Sea $\{O_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos con $O_i \in \mathcal{T}^{\sim}$. Veamos que $\cup O_i \in \mathcal{T}^{\sim}$ por definición $X \setminus \cup O_i \in \mathcal{T}$ y $X \setminus \cup O_i = \cap(X \setminus O_i)$, donde $X \setminus O_i \in \mathcal{T}$ como $\mathcal{T}$ es de Alexandroff se tiene que $\cap(X \setminus O_i) \in \mathcal{T}^{\sim}$. Y por lo tanto $\mathcal{T}^{\sim}$ es una topología.

Supongamos ahora que $\mathcal{T}^{sim}$ es una topología, veamos que $\mathcal{T}$ es A-topología. Sea $\{O_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos de $\mathcal{T}$. Hay que ver que $\cap O_i \in \mathcal{T}$, pero por hipótesis O_i es cerrado en $\mathcal{T}^{\sim}$ y por tanto $\cap O_i$ también lo es. Entonces por la definición de $\mathcal{T}^{\sim}$ se tiene que $\cap O_i \in \mathcal{T}$. ■

Nota 4.1.3.

1. Si $\mathcal{T}$ es una A-topología, entonces $(\mathcal{T}^{\sim})^{\sim} = \mathcal{T}$.

2. Los entornos mínimos de los puntos en la topología dual $\mathcal{T}^{\sim}$ se corresponden con las clausuras de estos, es decir, $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}^{\sim}} = \overline{\{x\}}^{\mathcal{T}}$. Para demostrar esto tenemos que ver que $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}^{\sim}} \subset \overline{\{x\}}^{\mathcal{T}}$ y que $\overline{\{x\}}^{\mathcal{T}} \subset \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}^{\sim}}$. En el primer caso, $\overline{\{x\}}^{\mathcal{T}}$ el ser un cerrado en $\mathcal{T}$ se corresponde con un abierto en $\mathcal{T}^{\sim}$ luego $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}^{\sim}} \subset \overline{\{x\}}^{\mathcal{T}}$. En segundo lugar, $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}^{\sim}}$ se corresponde con un cerrado en la topología $\mathcal{T}$ por lo tanto, gracias a que la clausura es el menor cerrado que contiene a un punto se tiene que $\overline{\{x\}}^{\mathcal{T}} \subset \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}^{\sim}}$.

   De la misma forma puede verse que $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} = \overline{\{x\}}^{\mathcal{T}^{\sim}}$.

Proposición 4.1.4. Sea $(X, \mathcal{T})$ es un A-espacio entonces:

1. El orden $\leqslant_{\mathcal{T}^{\sim}}$ es el orden inverso de $\leqslant_{\mathcal{T}}$, es decir, $x \leqslant_{\mathcal{T}^{\sim}} y$ si y solo si $y \leqslant_{\mathcal{T}} x$.

2. Si $(X, \mathcal{T})$ es T_0 entonces $(X, \mathcal{T}^{\sim})$ es también un A-espacio T_0

Demostración.

1. Tenemos que probar que $x \leqslant_{\mathcal{T}^{\sim}} y$ si y solo si $y \leqslant_{\mathcal{T}} x$. Supongamos que $x \leqslant_{\mathcal{T}^{sim}} y$ por definición $x \in \overline{\{y\}}^{\mathcal{T}^{\sim}}$ como $\mathcal{U}_y^{\mathcal{T}}$ es cerrado en $\mathcal{T}^{\sim}$ se tiene que $x \in \overline{\{y\}}^{\mathcal{T}^{\sim}} \subset \mathcal{U}_y^{\mathcal{T}}$, por la definición de abierto mínimo y de clausura, se tiene que $y \in \overline{\{x\}}^{\mathcal{T}}$ que implica $y \leqslant_{\mathcal{T}} x$. El recíproco se demuestra de forma equivalente.

2. Supongamos que $\mathcal{T}$ es T_0, sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Tenemos que probar que $y \notin \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}^{\sim}}$ o $x \notin \mathcal{U}_y^{\mathcal{T}^{\sim}}$. Ahora bien, como $(X, \mathcal{T})$ es T_0 se cumple que $y \notin \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}}$ o $x \notin \mathcal{U}_y^{\mathcal{T}}$. Supongamos que se tiene el primer caso, entonces como $y \in X \setminus \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}}$, que es cerrado en $\mathcal{T}$, y por tanto abierto en $\mathcal{T}^{\sim}$, se cumple que $y \in \mathcal{U}_y^{\mathcal{T}^{\sim}} \subset X \setminus \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}^{\sim}}$, así que $x \notin \mathcal{U}_y^{\mathcal{T}^{\sim}}$. Razonando del mismo modo se prueba el caso en que si $x \notin \mathcal{U}_y^{\mathcal{T}}$, entonces $y \notin \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}^{\sim}}$.

■

Definición 4.1.5. Sea $(X, \mathcal{T})$ un A-espacio. Si se verifica que $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\sim}$ entonces se dice que $\mathcal{T}$ es auto-dual.

Ejemplo 4.1.6.
Un ejemplo de topología auto-dual sería el espacio

$$(X, \mathcal{T}) = \{X.\emptyset, A, X \setminus A\},\ A \subset X.$$

Nota 4.1.7.

1. De la Nota 4.1.3 se llega a que en las topologáis auto-duales $\mathcal{U}_x = \overline{\{x\}}$. Esto quiere decir que las topologías auto-duales son muy anticonexas (salvo la topología trivial).
2. De la Proposición 4.1.4 se tiene que el orden asociado a una topología auto-dual es el trivial.

En el siguiente resultado, se prueba que las topologías auto-duales sobre un conjunto X están asociadas a una partición sobre un conjunto X, y por tanto, están en biyección con las relaciones de equivalencia sobre él.

Proposición 4.1.8. Si $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\sim}$ entonces $B = \{\mathcal{U}_x\}_{x \in X}$ es una partición de X. Si $(A_i)_{i \in I}$ es una partición de X, y $B = \{A_i : i \in I\}$ es una base de la A-topología auto-dual $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\sim}$. Además X es conexo si y solo si $\mathcal{T}$ es la topología trivial.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\sim}$, $\mathcal{U}_x$ es el entornos más pequeño que contiene a x y tenemos que $\mathcal{U}_x = \overline{\{x\}}$. Si $t \in \mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y$ entonces $\mathcal{U}_t \subseteq \mathcal{U}_x$, $t \in \overline{\{x\}}$, esto implica que $x \in \mathcal{U}_t$ y por lo tanto $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_t$, igualmente $\mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{U}_t$. B es una partición de X.

Sea $B = \{A_i : i \in I\}$ una partición, obviamente B es una base de una topología, denotemosla por $\mathcal{T}$. Además si $x \in A_i$, con A_i el abierto mas pequeño que contiene a x. Así $\mathcal{T}$ es una A-topología y $\mathcal{U}_x = A_i$.

Veamos que $\overline{\{x\}} = \mathcal{U}_x$.

A_i es un conjunto cerrado, por que $X \setminus A_i = \cup\{A_j; j \neq i\}$ es abierto. Consecuentemente $\overline{\{x\}} \subseteq A_i = \mathcal{U}_x$. Por lo tanto para todo $y \in \mathcal{U}_x$, $\mathcal{U}_y = \mathcal{U}_x$, $x \in \mathcal{U}_y$ e $y \in \overline{\{x\}}$. Por consiguiente $\overline{\{x\}} = \mathcal{U}_x$ y $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\sim}$.

Cualquier $\mathcal{U}_x$ es abierto y cerrado, luego X es un conjunto conexo si y solo si para todo $x \in X$, $\mathcal{U}_x = X$ si y solo si $\mathcal{T}$ es la topología trivial.
■

Teorema 4.1.9.

1. Si $(X, \mathcal{T})$ es un A-espacio, la aplicación $\gamma : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por $\gamma(A) = \cup\{\mathcal{U}_x : x \in A\}$ es un operador clausura, y si $\mathcal{T}_\gamma$ es su topología asociada, se tiene que $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T}^\sim$

2. $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ tienen los mismos conjuntos conexos, por lo tanto estas topologías tienen las mismas componentes conexas.

Demostración.

1. Es inmediato que $\gamma(\emptyset) = \emptyset$, que $A\ subset \gamma(A)$ y que $\gamma(A \cup B) = \gamma(A) \cup \gamma(B)$. Veamos que $\gamma(\gamma(A)) = \gamma(A)$. Para ello es suficiente probar que $\gamma(\gamma(A)) \subset \gamma(A)$. Ahora bien, $\gamma(\gamma(A)) = \cup\{\mathcal{U}_x;\, x \in \gamma(A)\}$. Sea pues $w \in \cup\{\mathcal{U}_x;\, x \in \gamma(A)\}$; entonces $w \in \mathbb{U}_x$ para algún $x \in \mathcal{U}_y$, con $y \in A$. Pero si $x \in \mathcal{U}_y, \mathcal{U}_x \in \mathcal{U}_y$, así que $x \in \mathcal{U}_y$, luego $w \in \gamma(A)$.

   Por otra parte $A \subset X$ es cerrado en $(X, \mathcal{T}_\gamma)$, si $A = \gamma(A)$, es decir, si y solo si $A = \cup\{\mathcal{U}_x;\, x \in A\}$. Por tanto, los cerrados de $\mathcal{T}_\gamma$ son los abiertos de $\mathcal{T}$, y se tiene así que $\mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T}^\sim$.

2. $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}^\sim$ tienen los mismos conexos pues los abiertos de $\mathcal{T}$ son los cerrados de $\mathcal{T}^\sim$.

■

Nota 4.1.10. Si existe $\phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ verificando las hipótesis del Lema 3.5.1, entonces $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}_\phi} = \phi(x)$, y la topología $\mathcal{T}_\phi^\sim$ es la topología asociada al operador clausura $\gamma(A) = \cup\{\phi(x);\, x \in A\}$. Por tanto, $\gamma(\{x\}) = \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}_\phi}$. Además, por la Nota 4.1.3 $\mathcal{T}_\phi$ y $\mathcal{T}_\phi^\sim$ son T_0 si y solo si ϕ es inyectiva

Proposición 4.1.11. Sea $(X, \mathcal{T})$ un A-espacio.

1. $sup(\mathcal{T}, \mathcal{T}^\sim)$ es la A-topología auto-dual asociada con la partición $\{A(x)\}_{x \in X}$ donde $A(x) = \{y : \mathcal{U}_y = \mathcal{U}_x\}$.

2. $inf(\mathcal{T}, \mathcal{T}^\sim)$ es la A-topología auto-dual asociada con la partición $\{C(x)\}_{x \in X}$ siendo $C(x)$ la componente conexa de x.

Demostración.

1. Recordemos que $sup(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{\sim})$ tiene como subbase la familia $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}^{\sim}$ y que por tanto tiene como base la familia $\{\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} \cap \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}^{\sim}}\} = \{\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} \cap \overline{\{x\}}^{\mathcal{T}}$. Veamos que $A(x) = \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} \cap \overline{\{x\}}^{\mathcal{T}}$, si $y \in \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} \cap \overline{\{x\}}^{\mathcal{T}}$, $\mathcal{U}_y^{\mathcal{T}} \subset \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}}$ y $x \in \mathcal{U}_y^{\mathcal{T}}$, por tanto $\mathcal{U}_y^{\mathcal{T}} \subset \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}}$ y $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} \subset \mathcal{U}_y^{\mathcal{T}}$, es decir $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} = \mathcal{U}_y^{\mathcal{T}}$. Además, $\{A(x)\}$ es una partición de X; pues si $z \in A(x) \cap A(y)$, entonces $\mathcal{U}_z^{\mathcal{T}} = \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} = \mathcal{U}_y^{\mathcal{T}}$, por lo que $\overline{\{x\}}^{\mathcal{T}} = \overline{\{y\}}^{\mathcal{T}}$ y resulta $A(x) = A(y)$. Si $\overline{\mathcal{T}}$ es la topología auto-dual asociada a $\{A(x)\}$, $\mathcal{T} \leqslant \overline{\mathcal{T}}$ porque $A(x) \subset \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}}$, y $\mathcal{T}^{\sim} \leqslant \overline{\mathcal{T}}^{\sim}$ $(= \overline{\mathcal{T}})$, pues $A(x) \subset \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}^{\sim}}$. Por tanto $sup(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{\sim}) \leqslant \overline{\mathcal{T}}$. Por otra parte, $A(x) \in sup(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{\sim})$, así que $\overline{\mathcal{T}} = sup(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{\sim})$.

2. Sea $\mathcal{C}$ la topología auto-dual asociada a la partición $\{C(x);\ x \in X\}$, cada $C(x)$ es un abierto y cerrado para $\mathcal{T}$, luego $C(x)$ es un abierto para $\mathcal{T}^{\sim}$, por lo tanto $\mathcal{C} \leqslant \mathcal{T}$ y $\mathcal{C} \leqslant \mathcal{T}^{\sim}$. Supongamos que tenemos $\mathcal{E}$ tal que $\mathcal{E} \leqslant \mathcal{T}$ y $\mathcal{E} \leqslant \mathcal{T}^{\sim}$, todo abierto $O \in \mathcal{E}$ es abierto y cerrado en $\mathcal{T}$. Luego para todo $x \in O$, $C(x) \subseteq O$, pues $C(x)$ está contenido en cualquier abierto y cerrado que contenga a x. Por consiguiente $O = \cup_{x \in O} C(x)$ es un abierto para $\mathcal{C}$. Por tanto $\mathcal{E} \leqslant \mathcal{C}$.

■

Nota 4.1.12.

1. Como $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} = A(x)$, por la Nota 3.5.3, $\mathcal{T}$ es T_0 si y solo si la aplicación dada por $\phi(x) = A(x)$ es inyectiva, es decir, si y solo si $A(x) = \{x\}$, pues si existiese $y \neq x$ con $y \in A(x)$, entonces $A(y) = A(x)$.

2. $(X, \mathcal{T})$ es conexo si y solo si $C(x) = X$, para todo $x \in X$. Por tanto $(X, \mathcal{T})$ es conexo si y solo si $inf(\mathcal{T}, \mathcal{T}^{\sim})$ es la topología trivial.

5 Espacios Finitos.

5.1. Espacios Finitos y (Pre)Órdenes.

Un problema ya clásico en topología, y que aún no ha sido resuelto es determinar cuantas topologías existen sobre un conjunto finito X. Si X tiene n elementos y $T(n)$ es el conjunto de topologías que se pueden definir sobre X, actualmente no se conoce ninguna fórmula para $|T(n)|$, ni existe un algoritmo eficiente que lo calcule.

En la siguiente tabla tomada de [23] se indican los valores de $|T(n)|$ para $n \leqslant 18$ y las clases de homeomorfismos de los elementos de $T(n)$

Por otra parte, es evidente que el único axioma de separación que tiene interés estudiar en los espacios finitos es el T_0, ya que todo espacio finito que sea T_1 es un espacio discreto. Una consecuencia de que un

Topologías v.s. Preórdenes		
n	Número de Topologías $\mid T(n) \mid$	Clases de homeomorfismo
1	1	1
2	4	3
3	29	9
4	355	33
5	6 942	139
6[a]	209 527	718
7[b]	9 535 241	4 535
8[c]	642 779 354	35 979
9[d]	63 260 298 423	363 083
10[e]	8 977 053 873 043	4 717 687
11[e]	1 816 846 038 736 192	79 501 654
12[f]	519 355 571 065 774 021	1 744 252 509
13[f]	207 881 393 656 668 953 041	49 872 339 897
14[g]	115 617 051 977 054 267 807 460	1 856 792 610 995
15[h]	88 736 269 118 586 244 492 485 121	89 847 422 244 493
16[i]	93 411 113 411 710 039 565 210 494 095	56 372 941 175 255 695
17[h]	134 137 950 093 337 880 672 321 868 725 846	?
18[i]	261 492 535 743 634 374 805 066 126 901 117 203	?

Tabla 5.1: *Topologías v.s. Preordenes.*

espacio finito es T_0 es que tiene que tener un conjunto unitario cerrado.

Proposición 5.1.1. Un espacio T_0 finito tiene al menos un conjunto unitario cerrado.

Demostración. Por inducción sobre $|X|$. Si $|X| = 1$ el resultado es evidente. Supongamos que se verifica para $|X| = n - 1$. Si $|X| = n$, sea $A \subseteq X$, tal que $|A| = n - 1$, Como A es un espacio T_0, por la hipótesis de inducción existe un punto $p \in A$ tal que $\{p\}$ es un conjunto cerrado en A, luego $\{p\} = A \cap F$ para algún conjunto F cerrado en X, entonces, tendremos $F \subseteq \{p, x_n\}$, siendo x_n el único punto de X que no está en A. Si $F = \{p\}$ se termina la demostración, por lo tanto supongamos que $F = \{p, x_n\}$. Sea O_1 un conjunto abierto en X tal que $p \in O_1$ y $x_n \notin O_1$. Entonces $O_1^c \cap F = \{x_n\}$ es cerrado en X. Si O_2 es un abierto en X tal que $p \notin O_2$ y $x_n \in O_2$, $O_2^c \cap F = \{p\}$ es un cerrado en X. ■

Nota 5.1.2. Este resultado no es cierto para cualquier A-espacio. Por ejemplo, si en $\mathbb{R}$ se considera la topología $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{[x, \infty) : x \in \mathbb{R}\}$. Entonces $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ es un A-espacio, con $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} = [x, \infty)$ y es T_0, pues dados $x \neq y$ si $y < x$, $x \notin \mathcal{U}_y$. Ahora bien, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\overline{\{x\}} = (-\infty, x]$. Como todo espacio finito $(X, \mathcal{T})$ es un A-espacio, $\mathcal{T}$ está determinada por su preorden de especialización $\leqslant_{\mathcal{T}}$, definido como $x \leqslant_{\mathcal{T}} y$ si $y \in \mathcal{U}_x$. Esta condición como en todos los A-espacios, se puede expresar de otras formas. $x \in \overline{\{y\}}$, $\overline{\{x\}} \subset \overline{\{y\}}$ o $\mathcal{U}_x = \uparrow x = \{y \in X;\, x \leqslant_{\mathcal{T}} y\}$.

En la siguiente tabla se indican los valores $|T_0(n)|$, siendo $T_0(n)$ el conjunto de las topologías T_0 sobre un conjunto de n elementos

La relación $\leqslant_{\mathcal{T}}$ es una relación de orden parcial si y solo si $(X, \mathcal{T})$ es T_0. Así pues, en los espacios finitos se tiene que

Proposición 5.1.3. Si $|X| = n$, entonces

1. Existe una biyección entre $T(n)$ y $|Pre(X)|$.

2. Existe una biyección entre $T_0(n)$ y $|Po(X)|$.

Es decir, en un conjunto finito X, las topologías son preordenes sobre X y las toplogías T_0 son ordenes parciales.

Topologías T_0 v.s. Órdenes parciales		
n	T_0 Topologías $\| T(n) \|$	Clases de homemomorfismo
1	1	1
2	3	2
3	19	5
4	219	16
5	4 231	63
6	130 023	318
7	6 129 859	2 045
8	431 723 379	16 999
9	44 511 042 511	182 231
10	6 611 065 248 783	2 567 284
11	1 396 281 677 105 899	46 749 427
12	414 864 941 055 853 499	1 104 891 746
13	171 850 728 381 587 059 351	3 383 827 452
14	98 484 324 257 128 207 032 183	1 338 193 159 771
15	77 567 171 020 440 688 353 049 939	68 275 077 901 156
16	8 348 052 978 549 015 781 384 425 579	4 483 130 665 195 087
17	122 152 541 250 295 322 862 941 281 269 151	?
18	241 939 392 597 201 176 602 897 820 148 085 023	?

Tabla 5.2: *Topologías T_0 v.s. Órdenes parciales.*

Se demuestra en [23] la fórmula

$$\sum_k \mathcal{S}(n,k)|Po(X)|$$

donde $\mathcal{S}(n,k)$ es el número de Stirling de segunda clase, es decir, el numero de relaciones de equivalencia sobre un conjunto de n elementos que tienen k clases de quivalencias, que se pueden obtener mediante la fórmula.

$$k!S(n,k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

Siendo el miembro de la izquierda el número de aplicaciones sobreyectivas de un conjunto de n elementos en otro de k elementos.

Por ser A-espacios, las aplicaciones continuas entre espacios finitos admiten la siguiente caracterización.

Nota 5.1.4. El conjunto de conjuntos abiertos $\{\mathcal{U}_x\}_{x\in X}$ es base para X. De hecho es la única base minimal para X.

Como todo espacio finito es compacto y en cuanto a las propiedades de conexión se tiene:

Teorema 5.1.5. Un espacio conexo finito es un espacio conexo por caminos.

La demostración de este teorema es una consecuencia directa del Teorema 3.4.5.

5.2. Funciones Continuas y Homeomorfismos Entre Espacios Fintos.

Proposición 5.2.1. Si $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ son espacios finitos, $f : (X, \mathcal{T} \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es continua si y solo si conserva los ordenes de especialización, es decir, $x \leqslant_{\mathcal{T}} y$ si y solo si $f(x) \leqslant_{\mathcal{T}'} f(y)$.

Demostración. Sea f una función continua, supongamos que $x \leqslant y$ en X, luego $x \in \mathcal{U}_y \subseteq f^{-1}(\mathcal{U}_{f(y)})$ y así $f(x) \in \mathcal{U}_{f(y)}$ lo que implica que $f(x) \leqslant f(y)$. Recíprocamente. Veamos que si O es abierto, entonces $f^{-1}(O)$ es abierto, viendo que es entorno de todos sus puntos. Para ello, probaremos que si $y \in f^{-1}(O), y \in \mathcal{U}_y \subseteq f^{-1}(O)$.

Sea $y \in f^{-1}(O)$ cualquiera, entonces $f(y) \in O$. Luego $\mathcal{U}_{f(y)} \subseteq O$ (ya que $\mathcal{U}_{f(y)}$ es base minimal).

Comprobemos que efectivamente $\mathcal{U}_y \subseteq f^{-1}(O)$. En efecto, pues para todo $x \in \mathcal{U}_y$ se tienes por hipótesis que (se preserva el orden), $x \leqslant y$ entonces, $f(x) \leqslant f(y)$, por lo tanto $f(x) \in \mathcal{U}_{f(y)} \subseteq O$ luego $\mathcal{U}_y \subseteq f^{-1}(O)$ para cualquier y. ■

Por otra parte, se tiene que los homeomorfismos de un espacio finito en si mismo son las aplicaciones continuas y biyectivas.

Proposición 5.2.2. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio finito y $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ es continua e inyectiva o sobreyectiva, f es un homeomorfismo.

Demostración. Por ser X finito, la condición de ser f inyectiva o sobreyectiva es equivalente a que f sea biyectiva. Entonces, f induce una biyección $\hat{f} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por $\hat{f}(A) = f(A)$. Pero si $\hat{f}(A) \in \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$, por ser f continua y biyectiva, $A = f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{T}$.

Como $\mathcal{T}$ es finita y $\mathcal{T} \subset \hat{f}(\mathcal{T})$, se tiene que $\hat{f} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ es biyectiva, ya que $|\hat{f}(\mathcal{T})| \leqslant |\mathcal{T}|$, por lo que f es abierta, ya que manda abiertos en abiertos. ■

Si denotamos por Y^X es espacio de la funciones continuas de X a Y, sobre dicho espacio se suele considerar la topología compacta abierta.

Definición 5.2.3. La topología compacta abierta ($\mathcal{T}_{CO}$) en Y^X es la tología que tiene como subbase el conjunto $W(C, A) = \{f \in Y^X : f(C) \subseteq A\}$ donde C es un compacto en X y O es un abierto en Y.

Si X e Y son espacios finitos entonces es evidente Y^X también lo es y por lo tanto es un A-espacio. En Y^X se puede considerar la siguiente relación de orden

Definición 5.2.4. El orden puntual $\leqslant$ en Y^X viene dado por $f \leqslant g$ si $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in X$.

Veamos que dicha relación es el orden de especialización de la topología compacta abierta, esto es equivalente a probar que ambas topologías (la asociada al orden puntual y la $\mathcal{T}_{CO}$) mismos entornos mínimos.

Proposición 5.2.5. Si X e Y son espacios finitos, entonces:

$$\bigcap\{O \subseteq Y^X;\ O\mathcal{T}_{CO}g \in O\} = \{f : f \leqslant g\} = \downarrow g.$$

Demostración. Sea $V_g = \bigcap\{O \subseteq Y^X;\ O \text{ es abierto y } g \in O\}$ y $Z_g = \{f;\ f \leqslant g\}$ y sea $x \in X$, $f \in V_g$. Ya que $g \in W(\{x\}, U_{g(x)})$, se tiene que $f(x) \in U_{g(x)}$, por lo tanto $f \leqslant g$, entonces $V_g \subseteq Z_g$.

Recíprocamente, sea $f \leqslant g$ tomamos $g \in W(C, A)$ luego $g(x) \in A$ para algún $x \in C$ ya que $f(x) \leqslant g(x)$ se tiene que $f(x) \in U_{g(x)}$ y por lo tanto $f(x)$ está en todo conjunto abierto que contenga a g y por lo tanto $Z_g \subseteq V_g$. ■

En [26] que existen A-espacios infinitos X de forma que, X^X no son A-espacios.

Como una consecuencia inmediata de la Proposición anterior sería lo siguiente.

Proposición 5.2.6. Sea X e Y espacios topológicos finitos. Si Y es T_0 entonces Y^X es T_0.

Demostración. Dados $f, g \in Y^X$ tales que $f \leqslant g$ y $g \leqslant f$, debemos ver que $f = g$. Pero como $f(x) \leqslant g(x)$ y $g(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in X$ e Y es T_0, se deduce que $f(x) = g(x)$ ∎

5.3. Espacios Finitos y Matrices.

Como ya se comentó las topologías sobre un conjunto finito están en correspondencia biyectiva con los preórdenes, mostrando así que tales espacios pueden ser estudiados desde otras estructuras de naturaleza algebraica.

Igualmente, Shiraki definió como matrices topógenas los objetos que trabajó Krishnamurthy, en un intento de contar las topologías que pueden definirse en un espacio finito, un problema que todavía no se ha resuelto. Además, dichas matrices dan toda la información sobre la topología de un espacio finito, mostrando la importancia de dichos objetos en el contexto topológico.

Durante el desarrollo de esta sección, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ será un conjunto de n elementos, $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ un conjunto de subindices y σ esuna permutación de I_n. Usaremos P_σ para denotar la matriz

$$[P_\sigma]_{ij} = \delta(i, \sigma(j))$$

siendo δ la delta de Kronecker.

5.3.1. Matriz Topógena.

Recordemos que $\mathcal{U}_x$ representa el abierto minimal que contiene a x, como hemos establecido que nuestro conjunto finito es $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ entonces $\mathcal{U}_{x_k} = \mathcal{U}_k$. Y la familia $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n\}$, la cual es la base minimal de la topología que esté asociada al espacio X.

Definición 5.3.1. Sea $(X, \mathcal{T})$ sea un espacio topológico finito y $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n\}$ la base mínima. La matriz topógena $T_X = [t_{ij}]$ asociada a X es la matriz cuadrada que satisface

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \in \mathcal{U}_j \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Ejemplo 5.3.2.
En la figura 5.3.2, se representa la base minimal para una topología en $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Los conjuntos mínimos son $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_5 = \{x_1, x_5\}$, $\mathcal{U}_2 = \{x_2, x_4\}$, $\mathcal{U}_3 = \{x_3\}$, $\mathcal{U}_4 = \{x_4\}$, $\mathcal{U}_6 = \{x_4, x_6\}$ y la matriz topógena asociada es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

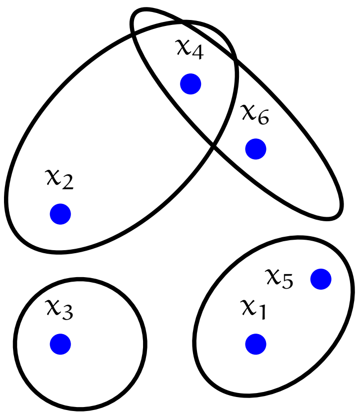


Figura 5.1: *Base minimal.*

Ejemplo 5.3.3.
Consideremos el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ donde $X = \{a, b, c, d, e\}$ y

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{b\}, \{d\}, \{b, d\}, \{d, e\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, e\}, \{a, b, c, d\}, X\}$$

Para las siguientes ordenaciones de los elementos, se obtienen respectivamente las matrices topógenas, que pueden comprobarse calculando la base mínima en cada caso.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a, b, c, d, e)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (b, d, e, a, c)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices topógenas se pueden caracterizar según el siguiente resultado, cuya prueba puede encontrarse en [18] y en [19]..

Teorema 5.3.4. Sea $T = [t_{ij}]$ una matriz topógena asociada al espacio $(X, \mathcal{T})$. Entonces T satisface las siguientes propiedades, para todo $i, j, k \in I_n$:

1. $t_{ij} \in \{0, 1\}$.

2. $t_{ii} = 1$.

3. $t_{ik} = t_{kj} = 1 \longrightarrow t_{ij} = 1$.

Reciprocamente, si una matriz cuadrada $T = [t_{ij}]$ de tamaño $n \times n$ satisface las propiedades anteriores, entonces T induce una topología sobre X.

Las clases de homeomorfismo también se describen por similitud a través de la matriz de permutación entre matrices topógenas.

Definición 5.3.5. Definimos la matriz de permutaciones, que corresponde a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p(1) & p(2) & \cdots & p(n) \end{pmatrix},$$

por $T = [\delta_{ip(j)}]$.

Definición 5.3.6. Dadas dos matrices topógeneas T y T', si existe una matriz de permutaciones P tal que

$$T' = P'^{t}TP$$

Entonces T y T' se dice que son equivalentes y se denota por

$$T \sim T'$$

Teorema 5.3.7. Sean $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ espacios topológicos finitos con matrices topógenas asociadas T_X y T_Y respectivamente. Entonces $(X, \mathcal{T})$ y $(X, \mathcal{T}')$ son espacios homeomorfos si y solo si T_X y T_Y son similares por permutaciones.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$ las bases minimales de entornos de $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{T}')$ respectivamente y sea $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ un homeomorfismo tal que

$$f(c_i) = c_{p(i)}(i = 1, 2, \ldots, n).$$

f induce la aplicación

$$f(\mathcal{U}_i) = \mathcal{V}_{p(i)}(i = 1, 2, \ldots, n),$$

que preserva la relación de inclusión en $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$. Si $T = [a_{ij}]$, tenemos

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \mathcal{U}_j \subset \mathcal{U}_i \Leftrightarrow \mathcal{U}_{p(j)} \subset \mathcal{U}_{p(i)} \Leftrightarrow a_{p(i)p(j)} = 1,$$

y

$$a_{ij} = a_{p(i)p(j)}(i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Se fija $P = [\delta_{ip(j)}]$, por lo tanto tenemos que $T' = P^tTP, porloque T \sim T'$.

Recíprocamente asumamos que $T \sim T'$ entonces existe una matriz $P = [\delta_{ip(j)}]$ tal que $T' = P^t T P$. Definimos $f : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}')$ por

$$f(a_i) = a_{p(i)},$$

Entonces f es un homeomorfismo. ■

Se puede prueba (ver Corolario 0.9 de [17]) que observando las diferentes entradas de dos matrices topógenas asociadas a dos topologías, se puede ver si una topología es más fina que la otra.

5.3.2. Triangularización de Matrices Topógenas

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico con base mínima $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n\}$ y su matriz topógena asociada $T_X = [t_{ij}]$. Se define la relación binaria $\leqslant$ sobre X como sigue:

$$x_i \leqslant x_j \Longleftrightarrow x_i \in \mathcal{U}_j \Longleftrightarrow \mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}_j \Longleftrightarrow t_{ij} = 1$$

Esta relación es de preorden sobre el espacio, es decir, reflexiva y transitiva. El siguiente Teorema, cuya demostración se puede encontrar en [7], muestra bajo que condición dicha relación es un orden parcial.

Teorema 5.3.8. Las topologías sobre un conjunto finito X están bajo correspondencia biyectiva con los preórdenes sobre X. Más aún, un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es T_0 si y solo si $(X, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Ejemplo 5.3.9.
Consideramos el espacio $(X, \mathcal{T})$ dado en el Ejemplo 5.3.3 con la ordenación

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a, b, c, d, e).$$

Tal espacio satisface el axioma de separación T_0. El diagrama de Hasse asociado al orden parcial $(X, \leqslant)$ es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_1 &= \{x_1, x_2, x_4\}\\
\mathcal{U}_2 &= \{x_2\}\\
\mathcal{U}_3 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\}\\
\mathcal{U}_4 &= \{x_4\}\\
\mathcal{U}_5 &= \{x_4, x_5\}
\end{aligned}$$

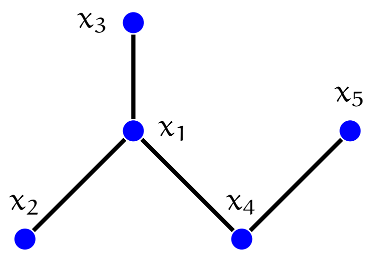


Figura 5.2: *Diagrama de Hasse asociado al orden $\leqslant$.*

En el Ejemplo 5.3.3 era posible asociar una matriz topógena triangular superior al espacio dado, ya que dicho espacio es T_0, como se prueba en el siguiente Teorema.

Teorema 5.3.10. Un espacio topológico finito $(X, \mathcal{T})$ es T_0 si y solo si la matriz topógena asociada T_X es similar por permutaciones a una matriz topógena triangular superior.

Demostración. Supongamos que $(X, \mathcal{T})$ es un espacio finito T_0 con matriz topógena asociada T. Sea $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $\mathcal{U}_i$ el entorno mínimo de x_i. Denotamos por N_i al número de elementos de $\mathcal{U}_i$, y modificamos X como $X = \{x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n}\}$ tal que si $i \leqslant j$, entonces $N_{p_i} \leqslant N_{p_j}$. Consideremos la matriz topógena $T' = [t'_{ij}]$ correspondiente a la nueva base, $(x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n})$ de X. Si $i < j$, entonces tenemos que $x_{p_i} \notin \mathcal{U}_{p_j}$, and $t'_{ij} = 0$. Por lo tanto, T' es una matriz triangular similar por permutaciones a T. Reciprocamente, asumamos que para una matriz topógena T del espacio $(X; \mathcal{T})$ existe una matriz triangular $T_1 = [t_{ij}]$ de forma que $T \sim T_1$. Si $x_i, x_j \in X$ y $x_i < x_j$, entonces $t_{ij} = 0$ ya que T_1 es una matriz triangular. Por lo tanto $a_j \notin \mathcal{U}_i$ por lo que el espacio es T_0. ■

Veamos la forma de triangular una matriz topógena de un espacio T_0 X. Dada la matriz topógena $T_X = [t_{ij}]$ definimos $M_k = \sum_{i=1}^{n} t_{ik} = |\mathcal{U}_k|$, para cada $k \in I_n$, si los organizamos en orden ascendente

$$M_{k_1} \leqslant M_{k_2} \leqslant \cdots \leqslant M_{k_n}$$

y consideramos la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix},$$

la matriz topógena $P_\sigma^t T_X P_\sigma$ es triangular superior: si $i > j$ y $t_{\sigma(i)\sigma(j)} = 1$, tendríamos $x_{\sigma(i)} < x_{\sigma(j)}$ y por lo tanto $M_{k_i} < M_{k_j}$, lo cual contradice el orden de M_k, por lo tanto $t_{\sigma(i)\sigma(j)=0}$.

Ejemplo 5.3.11.
Consideremos el espacio topológico X, representado por el siguiente diagrama de Hasse de la imagen 5.3 y matriz topógena:

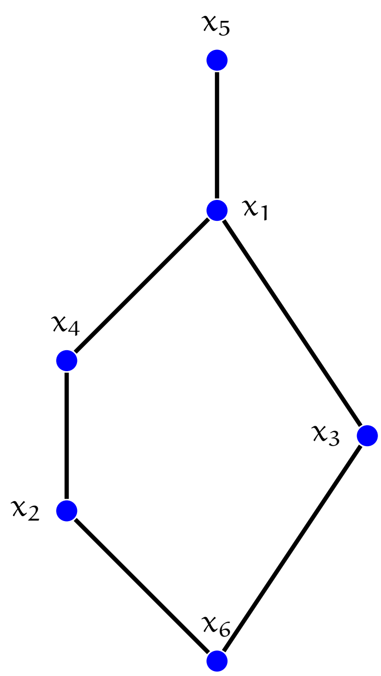


Figura 5.3: *Diagrama de Hasse.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Primero, vemos que $M_1 = 5$, $M_2 = M_3 = 2$, $M_4 = 3$, $M_5 = 6$ y $M_6 = 1$. Por lo tanto obtenemos la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (165)$$

cuya matriz asociada viene dada por

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si denotamos por $x'_k = x_{\sigma(k)}$, el nuevo orden de elementos es representado in la matriz topógena como sigue:

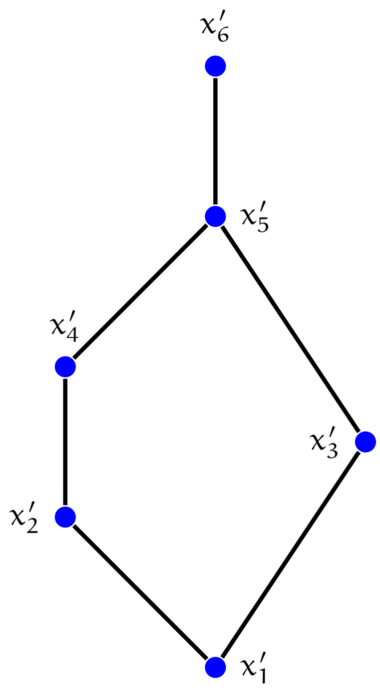


Figura 5.4: *Diagrama de Hasse asociado al nuevo orden.*

$$P_\sigma^t T_X P_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota 5.3.12. Observemos que, en general, la permutacion σ construida usando la relación

$$M_{k_1} \leqslant M_{k_2} \leqslant \cdots \leqslant M_{k_n}$$

no es única. En el Ejemplo 5.3.11, podríamos haber usado $\sigma' = (165)(23)$ para triangularizar T_X obteniendo la matriz triangular superior:

$$P_\sigma^t T_X P_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A pesar de la ausencia de unicidad a la hora de elegir tal permutación σ, los resultantes espacios T_0 son siempre homeomorfos (Teorema 5.3.7), por lo tanto las propiedades topológicas son las mismas.

Nota 5.3.13. A partir de ahora, en las dos siguiente secciones, cuando $(X, \mathcal{T})$ sea un espacio T_0, fijamos un orden en los elementos de X tal que la matriz topógena T_X sea triangular superior.

5.3.3. Matriz de Stong

Definición 5.3.14. Dado un espacio finito y T_0 X, definimos la matriz de Stong $S_X = [s_{ij}]$ como la matriz cuadrada que satisface

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & , x_i \leqslant x_j \text{ y no existe } k \text{ con } x_i < x_k < x_j \\ 0 & , \text{ en otro caso.} \end{cases} \tag{5.1}$$

Un método simple para calcular la matriz topógena T_X y la matriz de Stong S_X el espacio X, del diagrama de Hasse asociado. Numeramos los vértices de modo que $x_i < x_j \Longrightarrow i < j$, es decir, los numeramos de abajo hacia arriba asegurando que la matriz topógena es triangular superior. Para cada $i \neq j$:

1. $t_{ij} = 1$ si y solo si existe una cadena, cuyo mínimo es x_i, y el máximo x_j.
2. $s_{ij} = 1$ si y solo si, (x_i, x_j) es una arista del diagrama de Hasse.

Nota 5.3.15. Si $t_{ij} = 0$ entonces $s_{ij} = 0$ y $s_{ij} = 1$ entonces $t_{ij} = 1$.

Ejemplo 5.3.16.
Consideremos el diagrama de Hasse (figura 5.5) numerando los vértices como describimos antes (figura 5.6):

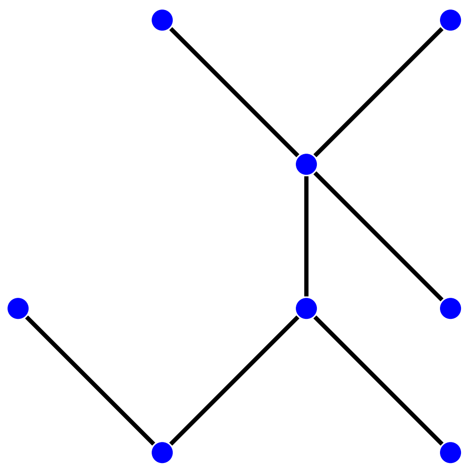


Figura 5.5: *Diagrama de Hasse sin numeración*

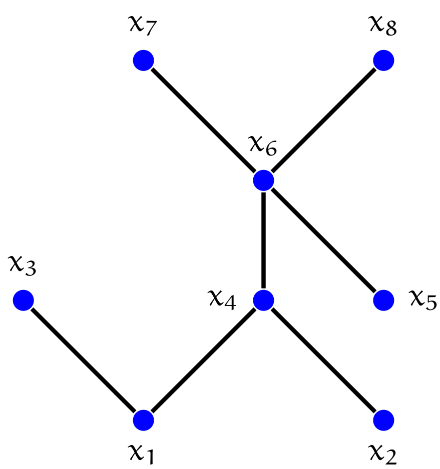


Figura 5.6: *Diagrama de Hasse con numeración*

Para x_5 tenemos, $x_5 \leqslant x_5, x_5 \leqslant x_6, x_5 \leqslant x_7$ y $x_5 \leqslant x_8$, por lo tanto la quinta fila de T_X será [0 0 0 0 1 1 1 1]. También, las aristas con el punto inicial x_1 son (x_1, x_3) y (x_1, x_4), por lo tanto la primera fila de S_X será [1 0 1 1 0 0 0 0]. Las matrices asociadas son las siguientes:

$$T_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.3.4. Relación entre las Matrices topógenas y de Stong.

Se puede obtener la matriz topógena de la matriz de Stong y viceversa. En el primero de los casos, usando el Teorema 5.3.4, podemos ver que la matriz topógena es la matriz de incidencia de la clausura transitiva de la relación binaria representada por la matriz de Stong. Para la matriz dada en el Ejemplo 5.3.16

$$S_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Añadimos unos en cada subdiagonal superior. La primera subdiagonal, consiste en los elementos $s_{k,k+1}$, $1 \leqslant k \leqslant 7$, no cambias pues si existe k tal que $s_{k,k+1} = 0$ y $t_{k,k+1} = 1$, existiría un x_j con $x_k < x_j < x_{k+1}$, lo que no es posible, ya que el orden que hemos tomado, dado en la Nota 5.3.13, implicará $k < j < k+1$, que es una contradicción. Para la segunda subdiagonal, cuyos elementos son $s_{k,k+2}$, $1 \leqslant k \leqslant 6$, habrá ceros en las entradas s_{35} y s_{57}. Ya que $s_{56} = s_{67} = 1$ tenemos que $t_{56} = t_{67} = 1$ por lo tanto $t_{57} = 1$ (por el Teorema 5.3.4) y así añadimos un uno en la entrada $(5,7)$. En el caso $s_{35} = 0$ no se tiene ninguna modificación, pues $s_{34} = s_{45} = 0$:

$$S_X^{(2)} = [s_{ij}^{(2)}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para la tercera subdiagonal, con los elementos $s_{k,k+3}$, $1 \leqslant k \leqslant 5$, tenemos ceros en las entradas $s_{25}^{(2)}$, $s_{36}^{(2)}$, $s_{47}^{(2)}$ y $s_{58}^{(2)}$. Por ejemplo, ya que $s_{46}^{(2)} = s_{67}^{(2)} = 1$ entonces $t_{46} = t_{67} = 1$ por lo tanto $t_{47} = 1$, y así añadimos un uno en la entrada $(4,7)$. De la misma forma razonamos para la entrada $(5,8)$ ya que $s_{56}^{(2)} = s_{68}^{(2)} = 1$. La entrada $(2,5)$ no cambia, pues no existe k tal que $s_{2k}^{(2)} = s_{k5}^{(2)} = 1$, y por la misma razón, tampoco cambia la entrada $(3,6)$:

$$S_X^{(3)} = [s_{ij}^{(3)}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Procediendo de forma similar en las siguientes subdiagonales, obtenemos las matrices $S_X^{(4)}$, $S_X^{(5)}$,$S_X^{(6)}$ y $S_X^{(7)}$:

$$S_X^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_X^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_X^{(6)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_X^{(7)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ya completada la última subdiagonal obtenemos la matriz topógena $T_X = S_X^{(7)}$ la cual coincide con la del Ejemplo

6 A-espacios y Topologías Sobre Grafos

En este capítulo introducimos dos topologías de Alenxandroff sobre un grafo llamada topología gráfica (en el que suponemos que el grafo $G = (V, E)$ es localmente finito) y la topología de incidencia. Estudiaremos algunas propiedades sobre ambas topologías y sus relaciones con los correspondientes grafos.

Buscar topologías que puedan inscribirse sobre los vértices de un grafo, es un campo de trabajo que han tocado muchos autores, los cuales buscaban que tipo de propiedades se podrían aplicar sobre los grafos o las topologías para unir los conceptos de conexión.

6.1. Topologías Sobre Grafos.

En esta sección definimos dos topologías sobre un grafo, en las cuales, supondremos que el grafo $G = (V, E)$ es un grafo simple y sin vértices aislados.

Recordemos que el conjuntos A_x es el conjunto de todos los vértices adyacentes a x. Es evidente que $x \in A_y$ si y solo si $y \in A_x$ para todo $x, y \in V$ y $x \notin A_x$ para todo $x \in V$.

6.1.1. Topología Gráfica.

En esta primera parte vamos a definir la topología gráfica y distintas caracterizaciones y propiedades de sus entornos mínimos.

Definición 6.1.1. Definimos, la topología gráfica $\mathcal{S}_G$ como:

$$\mathcal{S}_G = \{A_x : x \in V\}.$$

Ya que G no tiene vértices aislados, tenemos que $V = \cup_{x \in V} A_x$. Por lo tanto $\mathcal{S}_G$ es una subbase para la topología $\mathcal{T}_G$ en V (no es base en gerenal), llamada topología gráfica de G.

Proposición 6.1.2. Las topologías gráficas de K_n y C_n son la discreta, en el caso de C_n si y solo si $n \geqslant 5$. Pero la topología de P_n no es la discreta, para $n \geqslant 3$, pues contiene dos vértices de grado uno. También la topología gráfica de $K_{m,n}$ es $\{\emptyset, V, V_1, V_2\}$, donde V_1 y V_2 son los conjuntos partitos de $K_{m,n}$. Hacemos hincapié que todos los grafos que en este escrito se mencionen serán localmente finitos.

Proposición 6.1.3. Si $G = (V, E)$ es un grafo localmente finito. Entonces $(V, \mathcal{T}_G)$ es un A-espacio.

Demostración. Veamos que la intersección arbitraria de conjuntos de $\mathcal{S}_G$ es abierto. Sea $S \subseteq V$. Si $x \in \cap_{y \in S} A_y$, entonces $x \in A_y$ para cada $y \in S$. Por lo tanto $y \in A_x$ para cada $y \in S$ y por lo tanto $S \in A_x$. Como G es localmente finito, A_x y S son conjuntos finitos. Entonces $\cap_{y \in S} A_y$ es la intersección finita de abiertos y por lo tanto es abierto. ■

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Entonces por la Proposición 6.1.3, para cada $x \in V$, la intersección de todos los abiertos que contienen a x es el abierto más pequeño que contiene a x (entorno mínimo), que llamaremos $\mathcal{U}_x$ y la familia $\mathcal{B}_G = \{\mathcal{U}_x : x \in X\}$ es la base minimal para el espacio topológico $(V, \mathcal{T}_g)$.

Proposición 6.1.4. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Entonces se verifica que $\mathcal{U}_x = \cap_{y \in A_x} A_y$ y por lo tanto $\mathcal{U}_x$ es finito para todo $x \in V$.

Demostración. Ya que $\mathcal{U}_x$ es el abierto más pequeño que contiene a x y $\mathcal{S}_G$ es una subbase para $\mathcal{T}_G$, tenemos que $\mathcal{U}_x = \cap_{z \in S} A_z$ para algún subconjunto $S \subseteq V$. Esto implica que $x \in A_z$ para cada $z \in S$. Por lo tanto $S \subseteq A_x$ y por lo tanto $x \in \cap_{z \in A_x} A_z \subseteq \mathcal{U}_x$. Pero $\mathcal{U}_x$ es el abierto más pequeño que contiene a x. Y con esto se tiene la demostración. ■

Corolario 6.1.5. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Entonces para todo $x, z \in V$ se verifica que $z \in \mathcal{U}_x$ si y solo si $A_x \subseteq A_z$. Equivalentemente $\mathcal{U}_x = \{z \in V : A_x \subseteq A_z\}$.

Demostración. Por la Proposición 6.1.4, $z \in \mathcal{U}_x$ si y solo si $z \in A_y$ para cada $y \in A_x$ si y solo si $y \in A_z$ para cada $y \in A_x$. ■

Proposición 6.1.6. Supongamos que $G = (V, E)$ es un grafo y que $x \in V$. Entonces $\mathcal{U}_x \subseteq \{x\} \cup \{y \in V : d(x, y) = 2\}$ y por lo tanto $\mathcal{U}_x \cap A_x = \emptyset$. En particular, $\mathcal{U}_x \subseteq A_x^c$ y $A_x \subseteq \mathcal{U}_x^c$. Más aún, si $x, y \in V$ son adyacentes entonces $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \emptyset$.

Demostración. Sea $z \in \mathcal{U}_x \setminus \{x\}$. Por la Proposición 6.1.4, $z \in A_y$ para cada $y \in A_x$, por lo tanto $d(x, z) \leqslant 2$. Si $d(x, z) = 1$ entonces $z \in A_x$ y por el Corolario 6.1.5 $z \in A_z$ lo que es una contradicción. La segunda parte de la Proposición 6.1.6 es obvia.

Ahora, supongamos que x, y son adyacentes, entonces, tenemos que $y \in A_x$ donde A_x es abierto. Luego $\mathcal{U}_y \subseteq A_x$ y por la primera parte del Corolario, $A_x \subseteq \mathcal{U}_x^c$. Por lo tanto $\mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{U}_x^c$ o equivalentemente $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \emptyset$.

Una consecuencia obvia de la Proposición 6.1.6 (puesto que A_x^c es cerrado) es que para todo $x\ inV$ se verifica que $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\mathcal{U}_x} \subseteq A_x^c$ y $\overline{A_x} \subseteq \mathcal{U}_x^c$.

Finalmente el siguiente resultado es consecuencia trivial del Corolario 6.1.5 y la Proposición 6.1.3.

Corolario 6.1.7. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Para todo $x, y \in V$, $y \in \overline{\{x\}}$ si y solo si $A_y \subseteq A_x$.

Nota 6.1.8. Supongamos que $G = (V, E)$ es un grafo, entonces $(V, \mathcal{T}_G)$ es la discreta si y solo si $\mathcal{U}_x = \{x\}$ entonces por por el Corolario 6.1.5 $A_x \nsubseteq A_y$ y $A_y \nsubseteq A_x$ para todo par de vértices distintos $x, y \in V$.

6.1.2. Algunas Propiedades de la Topología Gráfica.

En el siguiente resultado se comprueba que dos grafos isomorfos (ver Definición 2.2.14) tienen topología gráfica homeomorfas.

Proposición 6.1.9. Si $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son grafos isomorfos entonces los espacios topológicos $(V_1, \mathcal{T}_{G_1})$ y $(V_2, \mathcal{T}_{G_2})$ son homeomorfos.

Demostración. Supongamos que $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ es un isomorfismo de grafos entre G_1 y G_2 ya que ϕ es una biyección, que $\phi(A_x) = A_{\phi(x)}$, $x \in V_1$ y que $\phi^{-1}(A_y) = A_{\phi^{-1}(y)}$, $y \in V_2$. ϕ es abierta abierta y continua y por lo tanto es un homeomorfismo. ■

El recíproco no es cierto, en general. Por ejemplo, C_n y K_n para $n > 4$ no son grafos isomorfos, pero su correspondiente topología gráfica es la discreta y por lo tanto son homeomorfos.

También podemos obtener dos grafos infinitos no isomorfos G_1 y G_2 con la topología gráfica discreta. Sea P un camino infinito sobre $x_1 - x_2 - x_3 \ldots$, K_n el grafo completo en $\{x_1, y_2, \ldots, y_n\}$ para $n \geqslant 5$. Sea $V = \{y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots\}$ y tomamos $G_1 = (V, E(K_n) \cup E(P))$, y $G_2 = (V, E(C_n) \cup E(P))$.

Proposición 6.1.10. Sea $G = (V, E)$ un grafo localmente finito. Entonces $(V, \mathcal{T}_G)$ es un espacio topológico compacto si y solo si V es finito.

Demostración. Por la Proposición 6.1.4, $\mathcal{U}_x$ es finito para todo $x \in V$. Por lo tanto si V es infinito, entonces $\mathcal{B}_G$ es un recubrimiento de $(V, \mathcal{T}_G)$ que no tiene recubrimiento finito. ■

Recordemos que $\Delta(G)$ representa mayor grado de los vértices de un grafo y $\delta(G)$ el menor grado de los vértices de un grafo.

Proposición 6.1.11. Sea $G = (V, E)$ un grafo y $T = \{x \in V : gr(x) = \Delta(G)\}$. Entonces $T \in \mathcal{T}_G$.

Demostración. Supongamos que $x \in T$ y $y \in \mathcal{U}_x$. Se sigue del Corolario 6.1.5 que $\Delta(G) = gr(x) \leqslant gr(y)$ y esto implica que $gr(y) = \Delta(G)$ y así $y \in T$. Por lo tanto $x \in \mathcal{U}_x \subseteq T$ luego x es un punto interior de T. ■

Proposición 6.1.12. Sea $G = (V, E)$ un grafo y $L = \{x \in V : gr(x) = \delta(G)\}$. Entonces L es un cerrado en $(V, \mathcal{T}_G)$.

Demostración. Por la Proposición 6.1.3 y 3.1.4 se tiene que $\overline{L} = \bigcup_{x \in L} \overline{\{x\}}$. Supongamos que $y \in \overline{L}$. Así $y \in \overline{\{x\}}$ para algún $x \in L$. Luego se sigue del Corolario 6.1.7 que $gr(y) \leqslant gr(x) = \delta(G)$. Por lo tanto $gr(y) = \delta(G)$ e $y \in L$. Luego L es cerrado. ■

Proposición 6.1.13.

1. Si x es un vértice de corte en un grafo (no necesariamente conexo) $G = (V, E)$. Entonces $\{x\} \in \mathcal{T}_{\mathcal{G}}$.

2. Si $G = (V, E)$ es un árbol y $x \in V$ tiene $gr(x) \geqslant 2$, entonces $\{x\} \in \mathcal{T}_G$.

3. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y C un conjunto separador mínimal de vértices que separa al grafo G en más de una componente conexa. Entonces $C \in \mathcal{T}_G$

Demostración.

1. Si x es un vértice de corte en un grafo entonces $G \setminus \{x\}$ divide el grafo en dos componentes C_1 y C_2. Además $x \in A_z$ para todo $z \in V$ tal que $z \in A_x$ verificándose que $A_x = A_x^{C_1} \cup A_x^{C_2}$, es decir A_x puede descomponerse en dos conjuntos de vértices adyacentes a x, de forma que cada uno está en una componente conexa (no existe ninguna arista entre las componentes C_1 y C_2 porque entonces x no sería un vértice de corte). Luego al realizar las intersecciones de los elementos de la subbase obtendremos $\cap_{z \in A_x} A_z = \{x\}$.

2. Este apartado es obvio, pues si el cardinal de $V > 2$ entonces en un árbol cualquier $v \in V$ con $gr(v) \geqslant 2$ es un vértice de corte, luego por el apartado anterior, se tiene el resultado.

3. Supongamos que $G \setminus C$ tiene $k \geqslant 2$ componentes, $G_i = (V_i, E_i)$ para $i = 1, \ldots, k$. Todo vértice $x \in C$ tiene que ser adyacente a vértices de al menos dos componentes diferentes, por ejemplo G_1 y G_2, pues en caso contrario x no sería necesario para crear dos componentes distintas y entonces $C \setminus \{x\}$ sería un conjunto de vértices separador con menos elementos que C. Supongamos que $\{y_1, \ldots, y_{k_1}\} = A_x \cap V_1$ y $\{z_1, \ldots, y_{k_2}\} = A_x \cap V_2$, entonces tenemos que $x \in \bigcap_{i=1}^{k_1} A_{y_i} \subseteq C \cup V_1$ y $x \in \bigcap_{i=1}^{k_2} A_{z_i} \subseteq C \cup V_2$ y por lo tanto

$$x \in (\bigcap_{i=1}^{k_1} A_{y_i})(\bigcap_{i=1}^{k_2} A_{z_i}) \subseteq C \cup (V_1 \cap V_2) = C.$$

Luego x es un punto interior de C. ∎

Definición 6.1.14. Un grafo G es vértice transitivo si para todo par $x, y \in V(G)$, existe un automorfismo de G que lleva x a y.

Ejemplo 6.1.15.
Los grafos ciclos, los grafos completos y el grafo de Petersen son grafos vértice transitivo.

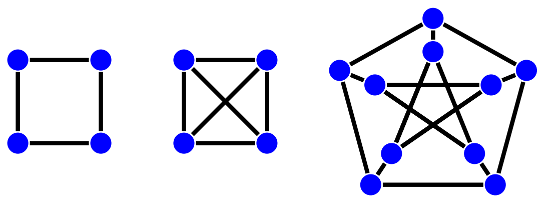


Figura 6.1: *grafo ciclo* C_4*, grafo completo* K_4 *y grafo de Petersen*

Para los grafos vértice transitivos tenemos el siguiente resultado, que nos da una condición necesaria y suficiente para que su topología gráfica sea la discreta.

Proposición 6.1.16. Si $G = (V, E)$ es un grafo vértice transitivo, entonces $(V, \mathcal{T}_G)$ es un espacio topológico discreto si y solo si $\mathcal{U}_x = \{x\}$ para algún vértice $x \in V$.

Demostración. Sea v un vértice arbitrario de V. Entonces existe un automorfismo $\phi : V \longrightarrow V$ sobre G tal que $\phi(w) = v$, $w \in V$. Es fácil ver que $\mathcal{U}_{\phi(v)} = \phi(\mathcal{U}_v)$ donde $\phi(\mathcal{U}_v) = \{\phi(u) : u \in \mathcal{U}_v\}$. Por lo tanto $\mathcal{U}_w = \mathcal{U}_{\phi(v)} = \phi(\mathcal{U}_v) = \phi(v) = \{y\}$. Y con esto se tiene la prueba. ■

Sabemos por el Teorema 3.1.17 y por Apartado 1 del Ejemplo 3.1.12 que un A-espacio $(X, \mathcal{T})$ es T_1 si y solo si es discreto. Entonces la siguiente Proposición nos da una condición necesaria y suficiente para que un grafo tenga una topología gráfica T_0.

Proposición 6.1.17. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Entonces $(V, \mathcal{T}_G)$ es un espacio T_0 si y solo si $A_x \neq A_y$ para todo par de vértices distintos $x, y \in V$.

Demostración. $\mathcal{T}_G$ es T_0 si y solo si $x \notin \mathcal{U}_y$ o $y \notin \mathcal{U}_x$ para todo $x, y \in V$ con $x \neq y$. Por lo tanto $\mathcal{T}_G$ es T_0 si y solo si $A_x \nsubseteq A_y$ o $A_y \nsubseteq a_x$ para todo $x, y \in V$ con $x \neq y$ por el Corolario 6.1.5. Con lo que la prueba se completa. ■

Corolario 6.1.18. Sea $T = (V, E)$ un árbol. Entonces $(V, \mathcal{T}_G)$ es T_0 si y solo si $A_x \neq A_y$ para todo $x, y \in V$ tal que $x \neq y$ y $gr(x) = gr(y) = 1$.

Demostración. La prueba se sigue del segundo apartado de la Proposición 6.1.13 y de la Proposición 6.1.17. ■

Sea $G = (V, E)$ un grafo localmente finito y sea el conjunto $\mathcal{T}_G^c = \{\mathcal{U}^c : \mathcal{U} \in \mathcal{T}_G\}$. Entonces $\mathcal{T}_G^c$ es una topología sobre V. Enunciamos la siguiente proposición para grafos finitos.

Proposición 6.1.19. Sea $G = (V, E)$ un grafo finito y sea $\mathcal{T}_G^c = \{\mathcal{U}^c : \mathcal{U} \in \mathcal{T}_G\}$. Si $\overline{G}$ es un grafo conexo y $\mathcal{T}_{\overline{G}} = \mathcal{T}_G^c$, entonces $(V, \mathcal{T}_G$ es un espacio topológico discreto.

Demostración. Sea A_x el conjuntos de los vértices adyacentes a x en G. Entonces el conjuntos de los vértices adyacentes de x en $\overline{G}$ es $(A_x \cup \{x\})^c$, que es abierto en $\mathcal{T}_{\overline{G}}$. Ya que $\mathcal{T}_{\overline{G}} = \mathcal{T}_G^c$, tenemos que $(A_x \cup \{x\})^c \in \mathcal{T}_G^c$, luego $A_x \cup \{x\} \in \mathcal{T}_G$. Por lo tanto $\mathcal{U}_x \subseteq A_x \cup \{x\}$, donde $\mathcal{U}_x$ es el abierto más pequeño que contiene a x en $\mathcal{T}_G$. Por lo tanto $\mathcal{U}_x = \{x\}$, pues $\mathcal{U}_x \subseteq A_x^c$ por la Proposición 6.1.6. Entonces $(V, \mathcal{T}_G)$ es discreto. ∎

Nota 6.1.20. Obsérvese que $\mathcal{T}_G^c = \mathcal{T}^{\sim}$. Y esto se puede interpretar del siguiente modo: si $\overline{G}$ es conexo, la topología gráfica sobre $\overline{G}$ es la topología dual de la topología gráfica sobre G.

El siguiente ejemplo muestra como la topología gráfica del complemento $\overline{G}$ de un grafo G con la topología gráfica discreta puede también tener la toplogía discreta.

Ejemplo 6.1.21.
Tomemos $G = C_5$ entonces $\overline{G} = C_5$ y ambos tienen la topología discreta.

6.1.3. FUNCIONES ENTRE GRAFOS.

En el transcurso de este capitulo, hemos visto que el isomorfismo de grafos induce a un homeomorfismo de espacios topológico entre las topologías gráficas de cada uno de ellos. En esta sección generalizaremos este hecho.

Teorema 6.1.22. Sea $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos y $\mathcal{T}_{G_1}$ y $\mathcal{T}_{G_2}$ las correspondientes topologías gráficas, y $f : V_1 \longrightarrow V_2$ una función. Considerando que f es una función entre espacios topológicos $(V_1, \mathcal{T}_1)$ y $(V_2, \mathcal{T}_2)$ se tienen las siguientes propiedades:

1. f es continua si y solo si $A_y \subseteq A_x$ implica que $A_{f(y)} \subseteq A_{f(x)}$ para todo $x, y \in V_1$.

2. Si f es cerrada e inyectiva, entonces $A_{f(y)} \subseteq A_{f(x)}$ implica que $A_y \subseteq A_x$ para todo $x, y \in V_1$.

3. Si f es sobreyectiva y $A_{f(y)} \subseteq A_{f(x)}$ implica que $A_y \subseteq A_x$ para todo $x, y \in V_1$, entonces f es cerrada.

Demostración.

1. Supongamos que f es continua, gracias al Corolario 6.1.5 basta ver que si $y \in \overline{\{x\}}$ entonces $f(y) \in \overline{\{f(x)\}}$. Pero esto es consecuencia del Teorema 1.1.22.

   Recíprocamente, para demostrar la continuidad, veamos que si $A \subset V_1$ se tiene que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. Por la Proposición 3.1.4 $\overline{A} = \overline{\bigcup_{x \in A}\{x\}} = \bigcup_{x \in A} \overline{\{x\}}$. Si $y \in A$ existe $x \in A$ tal que $y \in \overline{\{x\}}$. Por hipótesis y el Corolario 6.1.5 se tiene que $f(y) \in \overline{\{f(x)\}} \subseteq \overline{f(A)}$, luego $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ y así f es continua.

2. Si f es cerrada e inyectiva y $A_{f(y)} \subset A_{f(x)}$ por el Corolario 6.1.5 $f(y) \in \overline{\{f(x)\}}$. Como f es cerrada se tiene $\overline{\{f(x)\}} \subset f(\overline{\{x\}})$ por la Proposición 1.1.24, entonces $f(y) \in f(\overline{\{x\}})$ y por lo tanto $y \in f^{-}(f(\overline{\{x\}})) = \overline{\{x\}}$.

3. Supongamos que f es sobreyectiva y que $A_{f(y)} \subseteq A_{f(x)}$ implica que $A_y \subseteq A_x$ para todo $x, y \in V_1$. Sea $A \subset V_1$ un cerrado. Tenemos que $A = \overline{A} = \cup_{x \in A}\overline{\{x\}}$ y por lo tanto $f(A) = f(\cup_{x \in A}\overline{\{x\}}) = \cup_{x \in A} f(\overline{\{x\}})$, por ser $(V_1, \mathcal{T}_{G_1})$. un A-espacio. Para probar que $f(A)$ es cerrada, basta ver que $f(\overline{\{x\}})$ es cerrado para todo $x \in A$, ya que todos son A-espacios. Tenemos que $\overline{f(\overline{\{x\}})} = \cup_{t \in f(\overline{\{x\}})}\overline{\{t\}}$.

   Sea $z \in \overline{f(\overline{\{x\}})}$, veamos que $z \in f(\overline{\{x\}})$. Como $z \in \overline{\{t\}}$ para algún $t \in f(\overline{\{x\}})$. Por lo tanto existe algún $y \in \overline{\{x\}}$ tal que $t = f(y)$. Luego $z \in \overline{\{f(y)\}}$. Por ser f sobreyectiva, $z = f(z_1)$ para algún $z_1 \in V_1$. Por tanto $f(z_1) \in \overline{\{f(y)\}}$ lo que implica, por hipótesis y por el Corolario 6.1.5 que $z_1 \in \overline{\{y\}}$. Como $y \in \overline{\{x\}}$, entonces $\overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}}$ con lo que $z_1 \in \overline{\{x\}}$ y así $z \in f(\overline{\{x\}})$. ■

Corolario 6.1.23. Con notaciones del Teorema 6.1.22 f es un homeomorfismo si y solo si es biyectiva y $A_y \subseteq A_x$ si y solo si $A_{f(y)} \subseteq A_{f(x)}$ para todo $x, y \in V_1$.

6.1.4. Conexión de la Topología Gráfica.

En esta sección, profundizaremos en algunas condiciones que nos garantizan la conexión de la topología gráfica de un grafo conexo G.

En primer lugar es fácil ver que si $G = (V, E)$ es un grafo disconexo, entonces $(V, \mathcal{T}_G)$ es un espacio topológico disconexo.

Proposición 6.1.24. Sea $G = (V, E)$ un grafo disconexo. Entonces el espacio $(V, \mathcal{T}_G)$ no es conexo.

Demostración. Sea G_1 una componente conexa de G. Veamos que $V(G_1)$ (conjunto de vértices de la componente G_1) es un abierto y cerrado de $\mathcal{T}_G$. Es abierto pues para todo $x \in V(G_1)$, $\mathcal{U}_x \subset V(G_1)$, además, es cerrado pues si $x \notin V(G_1)$, $\mathcal{U}_x \subset V(G_i)$ donde G_i es la componente que contiene a x. ■

A lo largo de esta sección se verán casos que prueban que el recíproco no es cierto.

Proposición 6.1.25. Sea $G = (V, E)$ un grafo con n vértices. Si G tiene k vértices de grado $n - k$ que forman un conjunto independiente, entonces el conjunto de esos vértices es abierto y cerrado en $(V, \mathcal{T}_G)$. En particular, $(V, \mathcal{T}_G)$ es disconexo.

Demostración. Sea $\{x_1, \ldots, x_k\}$ un conjunto independiente en G tal que $gr(x_i) = n - k$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por lo tanto $A_{x_i} = V \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, ya que $gr(x_i) = n - k$ y x_i no es adyacente a $x_1, \ldots, x_k$. Se sigue entonces de la Proposición 6.1.6 que $\mathcal{U}_{x_i} \subseteq A^c_{x_i} = \{x_i, \ldots, x_n\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por lo tanto, por un lado $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es cerrado, ya que A_{x_i} está subbase de la topología, y por otro lado

$$\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{U}_{x_i} = \{x_1, \ldots, x_k\}. \tag{6.1}$$

es la unión de conjuntos abiertos. Por lo tanto $\{x_1, \ldots, x_k\}$ es también abierto. ■

El siguiente Corolario es consecuencia inmediata de la Proposición 6.1.25.

Corolario 6.1.26. Sea $G = (V, E)$ un grafo con n vértices. Si $x \in V$ es de grado $n - 1$, entonces $\{x\}$ es abierto y cerrado en $(V, \mathcal{T}_G)$ y $(V, \mathcal{T}_G)$ es disconexo.

Proposición 6.1.27. La topología gráfica de un grafo bipartito $G = (V, E)$, es disconexa.

Demostración. Supongamos que (A, B) es una partición de V. Entonces $A = \cup_{x \in B} A_x$ y $B = \cup_{y \in A} A_y$. Por lo tanto (A, B) es una partición en dos abiertos disjuntos de $(V, \mathcal{T}_G)$. ■

Ya que todo árbol es un grafo bipartito, el siguiente resultado, se tiene de forma directa de la Proposición 6.1.27.

Corolario 6.1.28. La topología gráfica de un árbol es disconexa.

Corolario 6.1.29. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Si existe un vértice $x \in V$ tal que A_x es maximal y minimal en $\mathcal{S}_G$, entonces $(V, \mathcal{T}_G)$ es disconexo.

Demostración. Veamos en primer lugar que A_x es maximal si y solo si $\mathcal{U}_x$ es minimal. Para ello, supongamos que existe un $z \in V$ tal que $A_x \subseteq A_z$, entonces por el Corolario 6.1.5 se tiene que $z \in \mathcal{U}_x$ y por tanto $\mathcal{U}_z \in \mathcal{U}_x$ como $\mathcal{U}_x$ es minimal en $\mathcal{B}_G$ se tiene que $\mathcal{U}_z = \mathcal{U}_x$ y aplicando de nuevo el Corolario 6.1.5 se tiene que $x \in \mathcal{U}_z$ si y solo si $A_z \subseteq A_x$. Análogamente se obtiene el recíproco. Y por el Lema 3.4.7 se llega al resultado. ■

Corolario 6.1.30. Sea $G = (V, E)$ un grafo $k-regular$. Entonces $\mathcal{U}_x$ es abierto y cerrado en $(V, \mathcal{T}_G)$ para todo $xinV$. En particular $(V, \mathcal{T}_G)$ es disconexo.

Demostración. Para todo $x \in V$ tenemos $|A_x| = k$, Por lo tanto A_x es maximal y minimal en $\mathcal{S}_G$. Y la prueba se tiene del Corolario 6.1.7. ■

Proposición 6.1.31. Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que para todo $x, y \in V$ tenemos que $x \in A_y$ o $A_x \subseteq A_y$ o $A_y \subseteq A_x$. Entonces $(V, \mathcal{T}_G)$ es disconexo.

Demostración. Por el Corolario 6.1.5 y la Proposición 6.1.6 y si suponemos suponemos cierta la proposición. Tenemos que $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \emptyset$ o $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_y$ o $\mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{U}_x$ para todo $x, y \in V$. Sea $x \in V$ un vértice tal que A_x es mínimo en $\mathcal{S}_G$. Entonces $\mathcal{U}_x$ es máximo en $\{\mathcal{U}_y : y \in V\}$ por la Nota **??**. Sea $W = \bigcup_{y \notin \mathcal{U}_x} \mathcal{U}_y$, entonces W es un conjunto abierto.

Veamos que $\mathcal{U}_x \cup W = V$ y que $\mathcal{U}_x \cap W = \emptyset$. Primero, sea $y \in V \setminus \mathcal{U}_x$. Por la definición de W, tenemos que $\mathcal{U}_y \subseteq W$ y por lo tanto $y \in W$. En segundo lugar, supongamos que $z \in \mathcal{U}_x \cap W$. Ya que $z \in W$, existe un vértice $y \in V$ tal que $y \notin \mathcal{U}_x$ y $z \in \mathcal{U}_y$. Luego $z \in \mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y$. Suponiendo que tenemos que $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_y$ o $\mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{U}_x$. En ambos casos vamos a tener que $y \in \mathcal{U}_x$, que es una contradicción. Si $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}_y$, entonces por ser $\mathcal{U}_x$ máximo, tenemos que $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$ y por lo tanto $y \in \mathcal{U}_x$, y si $\mathcal{U}_y \subseteq \mathcal{U}_x$ es inmediato que $y \in \mathcal{U}_x$. Por lo tanto $(\mathcal{U}_x, W)$ es una separación para $(V, \mathcal{T}_G)$. ■

Ejemplo 6.1.32.
Sea $G = (V, E)$ un grafo. Supongamos que $P = \{x \in V : \ gr(x) = 1\}$ tiene al menos dos elementos que son adyacentes a dos vértices distintos de $V \setminus P$. Si $V \setminus P$ es un ciclo con al menos 3 elementos, entonces $(V, \mathcal{T}_G)$ es conexo.

Para probar esto, supongamos que $P = \{a_1, \dots, a_k\}$ con $k \geqslant 2$. Es obvio que $V = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{U}_{a_i}$ y $\mathcal{U}_{a_i} \cap \mathcal{U}_{a_j} \neq \emptyset$ para todo $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Supongamos que $x \in V \setminus P$, entonces existe $y \in V$ y $a_i \in P$ tal que $x \in A_y$ e $y \in A_{a_i}$, luego, $x \in A_y = \mathcal{U}_{a_i}$, pues $gr(a_i) = 1$.

Ahora supongamos que a_i, a_j son elementos de P tales que existen distintos vértices $y_i, y_j \in V \setminus P$ con $y_i \in A_{a_i}$ y $y_j \in A_{a_j}$. Por lo tanto $\mathcal{U}_{a_i} = A_{y_i}$ y $\mathcal{U}_{a_j} = A_{y_j}$. Ya que $V \setminus P$ es un ciclo con al menos 3 elementos, existe $z \in V \setminus P$ tal que $z \in A_{y_i} \cap A_{y_j}$ y $z \in \mathcal{U}_{a_i} \cap \mathcal{U}_{a_j}$ con $\mathcal{U}_{a_i} \cap \mathcal{U}_{a_j} \neq \emptyset$.

Sea ahora $V = A \cup B$ con A y B conjuntos abiertos tales que $A \cap B = \emptyset$ y sea $a_i \in A$ y $a_j \in B$. Entonces $\mathcal{U}_{a_i} \subseteq A$ y $\mathcal{U}_{a_j} \subseteq B$ lo que implica que $\mathcal{U}_{a_i} \cap \mathcal{U}_{a_j} = \emptyset$. Y esto es una contradicción.

Y por último, finalizando esta sección se plantea el siguiente problema; ¿existe alguna condición necesaria y suficiente para la conexión de la topología gráfica?

6.1.5. Condiciones sobre Espacios Topológicos para Ser Grafos.

Definición 6.1.33. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es llamado gráfico, si existe algún grafo G (localmente finito) con conjunto de vértices V y sin vértices aislados, tal que $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}$.

En esta sección nos centraremos en mostrar que la propiedad de ser un espacio topológico gráfico es una propiedad topológica. Es decir, que es invariante bajo transformaciones con homeomorfismos, y daremos algunas condiciones necesarias y suficientes para que un espacio topológico sea gráfico.

Proposición 6.1.34. Sea $G = (V, E)$ un grafo y $\mathcal{T}_G$ la correspondiente topología gráfica. Si $(V', \mathcal{T})$ es un espacio topológico homeomorfo a $(V, \mathcal{T}_G)$, entonces $(V', \mathcal{T})$ es gráfico. En particular, ser gráfico es una propiedad topológica.

Demostración. Sea $f : (V, \mathcal{T}_G) \longrightarrow (V', \mathcal{T})$ un homeomorfismo. Entonces $(V', \mathcal{T})$ es también un A-espacio. Construimos una estructura gráfica $G' = (V', E')$ en V' con el objetivo de que $f(x)$ sea adyacente a $f(y)$ en G' si y solo si x es adyacente a y en G para todo $x, y \in V$. Entonces tenemos que $f(A_x) = A'_{f(x)}$ para todo $x \in V$, donde A_x y $A'_{f(x)}$ son los conjuntos de los vértices adyacentes a x en G y a $f(x)$ en G', respectivamente. Por lo tanto G' es también un grafo localmente finito. Probemos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{G'}$. Para ello, sea $\mathcal{U}_x$ en $(V, \mathcal{T}_G)$ y $\mathcal{U}'_y$ (resp. $\mathcal{V}_y$) en $(V', \mathcal{T}_{G'})$ (resp. en $(V', \mathcal{T})$). Probemos que $\mathcal{U}'_y = \mathcal{V}_y$. Como f es un homeomorfismo, $f(\mathcal{U}_x) = \mathcal{V}_{f(x)}$. Pero f también es un isomorfismo de grafos de G y G', por lo tanto $f(\mathcal{U}_x) = \mathcal{U}'_{f(x)}$ con lo que se termina la prueba. ■

Sabemos que en una topología gráfica $(V, \mathcal{T}_G)$, $\mathcal{U}_x$ es finito para cada $x \in V$. Por lo tanto si un A-espacio $(X, \mathcal{T})$ es gráfico, entonces $\mathcal{U}_x$ es finito. En la siguiente proposición daremos una condición necesaria para que un espacio topológico sea gráfico.

Proposición 6.1.35. Sea $(V, \mathcal{T})$ una topología gráfica y sea $\mathcal{U}_x$ el abierto más pequeño que contiene a x para todo $x \in V$. Entonces $\overline{\mathcal{U}_x} \neq V$. En particular, $\overline{\{x\}} \neq V$ para todo $x \in V$.

Demostración. Sea G un grafo en V tal que $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}$ y sea $x \in V$. Ya que G no tiene vértices aislados, tenemos que $A_x \neq \emptyset$ y por lo tanto $A_x^c \neq V$. Por lo tanto $\overline{\mathcal{U}_x} \neq V$ por la Proposición 6.1.6. ∎

El siguiente ejemplo muestra que la condición de la Proposición anterior no es suficiente.

Ejemplo 6.1.36.
Sea $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, V, \{1\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}\}.$$

Tenemos que $\mathcal{U}_1 = \{1\}$, $\mathcal{U}_2 = \{1, 2\}$, $\mathcal{U}_3 = \{1, 3\}$ y $\mathcal{U}_4 = \{4\}$. Sabemos que $y \in \overline{\{x\}}$ si y solo si $x \in \mathcal{U}_y$ y por lo tanto $\overline{\{1\}} = \{1, 2, 3\}$, $\overline{\{2\}} = \{2\}$, $\overline{\{3\}} = \{3\}$ y $\overline{\{1\}} = \{4\}$. Por lo tanto $(V, \mathcal{T})$ satisface la Proposición anterior para no es gráfico.

La siguiente proposición nos da una condición suficiente para que un espacio topológico finito sea gráfico.

Proposición 6.1.37. Sea $(V, \mathcal{T})$ un espacio topológico finito y $\mathcal{V}_x$ el menor abierto que contiene a x para todo $x \in V$. Si para todo $x, y \in V$, $\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_y$ o $\mathcal{V}_x \cap \mathcal{V}_y = \emptyset$, entonces $(V, \mathcal{T})$ es gráfico.

Demostración. Construimos el grafo $G = (V, E)$ como sigue

$$\{x, y\} \in E \iff \mathcal{V}_x \cap \mathcal{V}_y = \emptyset, \text{ para todo } x, y \in V. \tag{6.2}$$

Para todo $x \in V$ consideramos $\mathcal{U}_x$ en $\mathcal{T}_G$ y A_x. Veamos que $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}$. Sea $x \in V$. Basta ver que $\mathcal{U}_x = \mathcal{V}_x$. Por 6.2, tenemos que $A_y = \{z \in V : \mathcal{V}_y \cap \mathcal{V}_z = \emptyset\}$ para todo $y \in V$. Por lo tanto $y \in \mathcal{U}_x$ si y solo si $A_x \subseteq A_y$ si y solo si $\{z \in V : \mathcal{V}_x \cap \mathcal{V}_z = \emptyset\} \subseteq \{z \in V : \mathcal{V}_y \cap \mathcal{V}_z = \emptyset\}$. Supongamos que $y \in \mathcal{U}_x \setminus \mathcal{V}_x$. Por lo tanto $\mathcal{V}_x \cap \mathcal{V}_y = \emptyset$, por otra parte $\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_y$ y por lo tanto $y \in \mathcal{V}_x$ que es una contradicción. Luego $y \in A_x$, pero $A_z \subseteq A_y$ y esto implica que $y \in A_y$ que es una contradicción. Así que $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{V}_x$. Recíprocamente, si $y \in \mathcal{V}_x$, entonces $\mathcal{V}_y = \mathcal{V}_x$. Así que si $z \in A_y$ para algún $z \in V$, entonces $\mathcal{V}_x \cap \mathcal{V}_z = \emptyset$ y así $\mathcal{V}_y \cap \mathcal{V}_z = \emptyset$. Esto implica que $z \in A_y$, luego $A_x \subseteq A_y$. Por lo tanto $y \in \mathcal{U}_x$ y $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{U}_x$, lo que completa la prueba. ■

El siguiente ejemplo muestra que la condición dada en la Proposición anterior no es necesaria.

Ejemplo 6.1.38.
Sea $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, V, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Entonces $(V, \mathcal{T})$ no satisface la condición de la proposición anterior, pero es gráfico.

Esta sección la podemos terminar, dejando el siguiente problema abierto; ¿existe alguna condición necesaria y suficiente que nos asegure cuando un A-espacio es gráfico?

6.1.6. Topología de Incidencia

En [15] se define una topología sobre cualquier grafo $G = (V, E)$, sea o no localmente finito. No obstante dicha topología es la discreta si $\delta(G) \geqslant 2$, por lo que su interés es muy limitado. Desde luego no corresponde en absoluto a la idea de Bretto o Prea sobre topologías compatibles que detallaremos en las siguientes secciones.

Indicaremos a continuación propiedades más destacadas de la topología de incidencia.

Definición 6.1.39. Dado un grafo $G = (V, E)$ sin vértices aislados para cada $e \in E$, sea I_e el conjunto de sus vértices. La familia

$$\mathcal{S}_{IG} = \{I_e : e \in E\}$$

es una subbase para las topología $\mathcal{T}_{IG}$ sobre V, llamada topología de incidencia.

Luego esta forma de definir una topología sobre un grafo es muy limitada, pues solo tienen relevancia los grafos que tengan algún vértice de grado uno, ya que en otro caso, la topología que se genera es la discreta. A lo largo de esta sección los grafos que se consideran en la mayoría de resultados cumplirán que al menos uno de sus vértices tiene grado uno.

Ejemplo 6.1.40.
Si $G = (V, E)$ es el grafo de la figura 6.2 entonces

$$\mathcal{S}_{IG} = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2\, v_3\}, \{v_4, v_3\}\}$$

y haciendo uniones e intersecciones podemos construir la topología $\mathcal{T}_{IG}$.

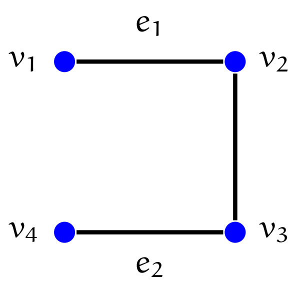


Figura 6.2: *Dos vértices de grado 1 y dos vértices de grado 2.*

Nota 6.1.41. Nótese que si $gr(v) \geqslant 2$, entonces $\{v\} \in \mathcal{T}_{IG}$, ya que $\{v\}$ es la intersección de al menos dos aristas que inciden en v

Proposición 6.1.42. $(V, \mathcal{T}_{IG})$ es un A-espacio.

Demostración. Sea $v \in V$, si $gr(v) \geqslant 2$, entonces $\mathcal{U}_v = \{v\}$ es el entorno mínimo de v, y si $gr(v) = 1$ entonces $\mathcal{U}_v = I_v$, siendo I_v la única arista que incide en v.

Proposición 6.1.43. En $(V, \mathcal{T}_{IG})$ se puede expresar la clausura de un punto como:

$$\overline{\{v\}} = \{v\} \cup \{w \in V : w \in A_v, gr(w) = 1\}.$$

Veamos la Figura 6.3 $\overline{\{v_1\}} = \{v_1\}$ y $\overline{\{v_2\}} = \{x, y\}$.

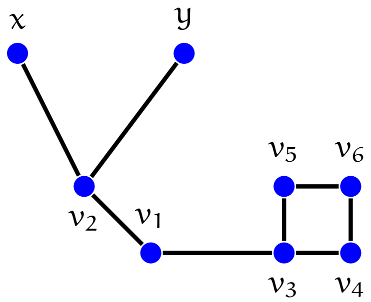


Figura 6.3: *Diferencia entre la clausura de* v_1 *y* v_2*.*

Demostración. Esta demostración la haremos por casos. Si $gr(v) = 1$ o si $gr(v) \geqslant 2$ y no existe ningún $x \in A_v$ tal que $gr(x) = 1$ es fácil ver que $\overline{\{v\}} = \{v\}$. Ya que no existe ningún abierto que los contenga más que sus respectivos definidos por la Topología de Incidencia.

En el caso en que $gr(v) \geqslant 2$ y existen en sus adyacentes algún vértice con grado uno, entonces existirán al menos dos abiertos que contengan a v, aquellos que se generan a partir de los vértices adyacentes de grado uno y el que genera el propio v. $blacksquare$

Corolario 6.1.44. En $(V, \mathcal{T}_{IG})$ se tiene que la clausura de una arista $\overline{\{w, v\}}$ con $vw \in E(G)$ es

$$\overline{\{w, v\}} = \{v, w\} \cup \{u \in V : u \in A_v \cup A_w, gr(u) = 1\}$$

la demostración se tiene considerando que la clausura de $\overline{\{w, v\}}$ como la unión de las clausuras de v y w.

Proposición 6.1.45. Sea $I = \{w, v\}$ entonces:

$$\overline{\{I\}} = \bigcup \mathcal{N}_u, \; u \in A_v \cup A_w, \; gr(u) = 1.$$

Demostración. Esto se tiene directamente considerando como se definen los entornos mínimos de los vértices de grado uno. ∎

Proposición 6.1.46. Sea $I = \{w, v\}$ entonces $\overline{I}$ es abierto y cerrado.

Demostración. Basta probar que es abierto. Para ello diferenciaremos varios casos:

1. Si $I = \{w, v\}$ tal que $gr(v) \geqslant 2$ y $gr(v) \geqslant 2$. Entonces

   $$\overline{\{I\}} = \{v, w\} \cup \{u \in V : u \in A_v \cup A_w, gr(u) = 1\}.$$

   Donde V es el conjunto de vértices del grafo. Y a su vez, esto puede expresarse como

   $$\overline{\{I\}} = \bigcup \mathcal{N}_u, \ u \in A_v \cup A_w, \ gr(u) = 1.$$

   Luego la clausura puede ponerse como unión de conjuntos abiertos, y por lo tanto el conjunto es abierto y cerrado.

2. Si $I = \{w, v\}$ tal que $gr(v) \geqslant 1$ y $gr(v) \geqslant 2$. Entonces

   $$\overline{\{I\}} = \{v, w\} \cup \{u \in V : u \in A_v, gr(u) = 1\}.$$

   Y por lo tanto, aplicando lo mismo de antes,

   $$\overline{\{I\}} = \bigcup \mathcal{N}_u, \ u \in A_v, \ gr(u) = 1.$$

   Por lo mismo de antes, se tiene que este conjunto es abierto y cerrado.

3. Si $I = \{w, v\}$ tal que $gr(v) = gr(v) = 1$. Esta caso es trivial.

■

por tanto la topología de incidencia es más pobre que la topología gráfica, como anunciábamos al principio de la sección.

La topología de incidencia será conexa si el grafo que estudiamos es del tipo $K_{1,m}$ con $m \geqslant 1$.

Ejemplo 6.1.47.
consideremos $G = K_{1,m}$ con $m \geqslant 4$ este grafo es de comparabilidad... (moverlo al final) veamos quien es $\mathcal{S}_g$

6.2. TOPOLOGÍAS COMPATIBLES SOBRE GRAFOS.

Ante la pregunta que planteamos sobre la caracterización de la conexión de la topología gráfica, surge el siguiente concepto; topología compatible sobre un grafo.

Definición 6.2.1. Una orientación en $G = (V, E)$ es un preorden (una relación reflexiva y transitiva), en sus vértices tal que dados $x, y \in V$, entonces $\{x, y\} \in E$ si y solo si $x \leqslant y$ o $y \leqslant x$.

Por comodidad al representar una orientación en un grafo, lo haremos sin poner los bucles en cada vértice.

Definición 6.2.2. Un grafo de comparabilidad es una grafo no dirigido en el que es posible orientar cada arista de forma que el grafo resultante ($G = (V, E)$) tiene las siguientes propiedades:

1. Antisimétrica: Si la arista $u \to v$ existe, entonces $v \to u$ no existe.

2. Transitividad: Si las aristas $u \to v$ y $v \to w$ existe, entonces $u \to w$.

Equivalentemente, un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es un grafo de comparabilidad si existe una orientación en G. Un grafo de comparabilidad es un grafo no dirigido que conecta pares de elementos que son comparables entre sí bajo una relación de orden.

También un grafo de comparabilidad es un grafo no dirigido que puede orientarse de tal manera que exista un camino de x a y, entonces (x,y) será una arista del grafo. Y llamaremos a esta orientación, una orientación compatible en G.

Ejemplo 6.2.3.
Los grafos ciclos C_n con n impar no son grafos de comparabilidad.

Los grafos de comparabilidad tienen gran importancia en la teoría de grafos y combinatoria. Han sido estudiados en problemas teóricos como en [11] o en aspectos algorítmicos en [12, 13].

Ejemplo 6.2.4.
En la figura 6.4 vemos un grafo de comparabilidad G y sus preórdenes representados por diagramas de Hasse

Nota 6.2.5. Obsérvese que dado un grafo de comparabilidad, puede estar asociado a distintos preordenes sobre el conjunto de sus vértices.

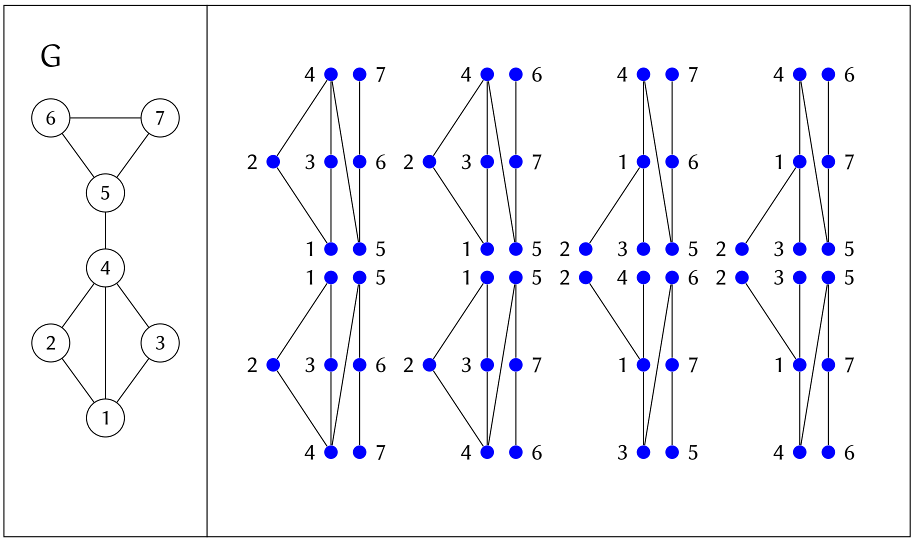


Figura 6.4: *Preórdenes asociados a un grafo de comparabilidad*

Dentro de los grafos de comparabilidad, encontramos un resultado conocido como Teorema de Gallai, cuya prueba podemos encontrarla en [27].

Teorema 6.2.6. Un grafo G es un grafo de comparabilidad si y solo si no contiene a ninguno de los grafos de la figura 6.5, o ninguno de los grafos complementarios de los grafos de la figura 6.6.

Definición 6.2.7. Sea $\mathcal{T}$ una topología sobre el conjunto de los vértices V de una grado $G = (V, E)$. Entonces se dice que $\mathcal{T}$ es compatible, si los subespacios conexos de $(V, \mathcal{T})$ son los mismos que los subgrafos inducidos de $G(V, E)$.

Proposición 6.2.8. Sea $G = (V, E)$ un grafo y $\mathcal{T}$ una topología sobre V. Entonces son equivalentes:

1. $\mathcal{T}$ es compatible.
2. Para todo $\{x, y\} \in E(G)$, $\{x, y\}$ es $\mathcal{T}$-conexo.

Demostración. Basta probar que 2) implica 1). Supongamos que existe $W \subset V$ tal que el grafo inducido $G[W] \subset G$ es conexo pero no $\mathcal{T}$—conexo. Entonces existirían O, $O' \in \mathcal{T}$ tales que $O \cap W \neq \emptyset \neq$

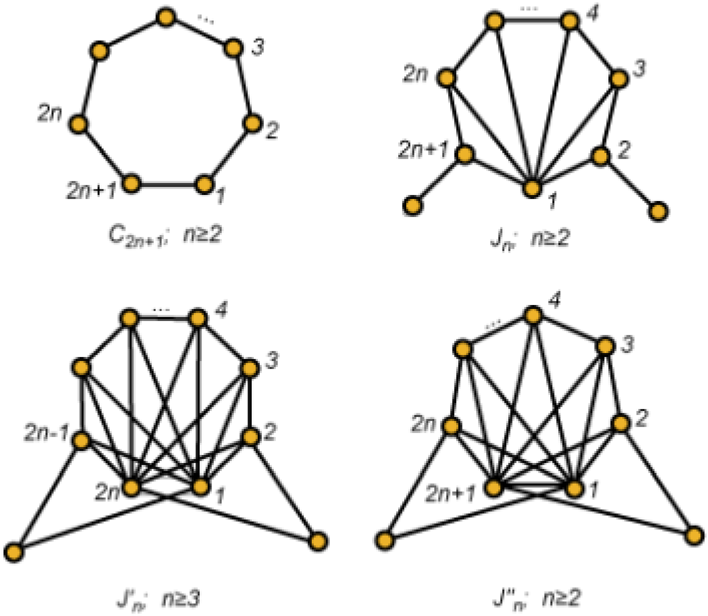


Figura 6.5: *Grafos prohibidos.*

$O' \cap W$, $(O \cap W) \cup (O' \cap W) = W$, y $(O \cap W \cap O') = \emptyset$. Sea $x \in O \cap W$ e $y \in O' \cap W$. Por se $G[W]$ conexo existiría un camino de x a y sin aristas ni vértices repetidos, $x = x_0 x_1 \dots x_n = y$. Si $1 \leqslant i \leqslant n-1$ es el mayor indice tal que $x_i\ inO \cap W$, $x_{i+1} \notin O \cap W$, y por tanto $x_{i+1} \in O' \cap W$. Luego, $O \cap x_i, x_{i+1}$ y $O' \cap x_i, x_{i+1}$ sería una partición por abiertos de x_i, x_{i+1} y este conjunto sería conexo.

■

Proposición 6.2.9. Sea $\mathcal{T}$ una topología compatible sobre G, tenemos las siguientes propiedades:

1. $\overline{\{x\}} \cap \bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V = \{x\} \cup A_x$.
2. $\mathcal{T}$ es T_0 si y solo si $\overline{\{x\}} \cup \bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V = \{x\}$.

Demostración.

1. Se prueba por doble inclusión:

$$\overline{\{x\}} \cup (\cap \{V;\ V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}\}) \subset \overline{\{x\}} \cup A_x.$$

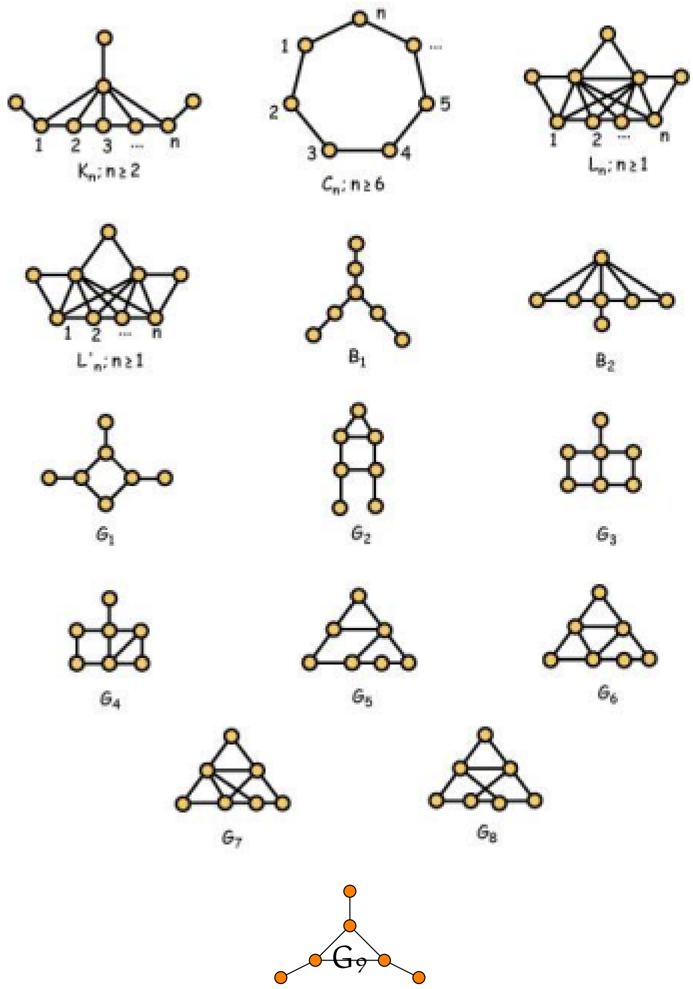


Figura 6.6: *Grafos cuyos complementarios son prohibidos.*

Supongamos que $y \in \overline{\{x\}}$ con $x \neq y$, por el Lema 3.4.2 $\{x, y\}$ es una conjunto $\mathcal{T}-$conexo. Por lo tanto $\{x, y\} \in E$ e $y \in \{x\} \cup A_x$.

Si $y \in \cap\{V;\ V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}\}$, entonces $x \in \overline{y}$ pues todo entorno de x contiene a y. Así que, de nuevo por el Lema 3.4.2 se tiene que $\{x, y\}$ es $\mathcal{T}-$conexo y además se tiene que $y \in \{x\} \cup A_x$.

Veamos ahora que

$$\overline{\{x\}} \cup A_x. \subset \overline{\{x\}} \cup (\cap\{V;\ V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}\}).$$

Si $y \in A_x$, entonces $\{x, y\} \in E(G)$, luego por ser $\mathcal{T}$ compatible

$\{x, y\}$ es $\mathcal{T}$-conexo. Por el Lema 3.4.2, $y \in \overline{\{x\}}$, o $x \in \overline{\{y\}}$. Si se da el primer caso ya hemos terminado, y si se da que $x \in \overline{\{y\}}$ es porque $y \in \cap\{V;\ V \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}\}$ y se sigue el resultado.

2. Supongamos que $\mathcal{T}$ es T_0, y que $y \in \overline{\{x\}} \cap (\bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V)$, así $x \in \overline{\{y\}}$ e $y \in \overline{\{x\}}$, luego $y = x$ y se tiene que $\overline{\{x\}} \cap (\bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V) = \{x\}$.

   Recíprocamente, si se tiene que $\overline{\{x\}} \cup (\bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V) = \{x\}$ supongamos que $x \neq y$, entonces o bien $y \notin \overline{\{x\}}$ o $y \notin \bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V$ por tanto $\mathcal{T}$ es T_0

■

Veamos a continuación que toda topología compatible sobre un grafo localmente finito es una A-topología. Para ello, se usará el siguiente resultado

Teorema 6.2.10. Sea $\mathcal{T}$ una topología compatible sobre G, tenemos las siguiente propiedades:

1. Si $\mathcal{T}$ es una A-topología entonces $\overline{\{x\}} \cup \mathcal{U}_x = \{x\} \cup A_x$ y $\{x\} \cup A_x$ es un entorno conexo de x.

2. Si G es un grafo conexo y localmente finito, y $\mathcal{T}$ es una topología compatible sobre G, entonces $\{x\} \cup A_x \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, para todo $x \in V(G)$.

Demostración. Para un elemento $x \in X$ la componente conexa de $X \setminus A_x$ son $\{x\}$ y $(C_i)_{i \in I}$. $\{x\} \cup C_i$ no es un conjunto conexo (por construcción), así $x \notin \overline{C_i}$. De esto, existe $V_i \in \mathcal{N}_x$ tal que $V_i \cap C_i = \emptyset$. Sea $W := \bigcap_{i \in I} V_i$, tenemos que para todo $i \in I$, $W \cap C_i = \emptyset$ así $W \subseteq \{x\} \cup A_x$.

1. Si $\mathcal{T}$ es una A-topologia entonces $W \in \mathcal{N}_x$ y $\{x\} \cap A_x$ es un entorno de x. Y en efecto $\mathcal{U}_x = \bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} V$, luego $\overline{\{x\}} \cup \mathcal{U}_x = \{x\} \cup A_x$ y $\{x\} \cup A_x$ es $\mathcal{T}$-conexo, por ser $\{x\} \cup A_x$ es un subgrafo conexo de G.

2. Para cada $x \in V(G)$, $\{x\}$ es una componente conexa de $G \setminus A_x$. Si $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$ es la familia formada por el resto de componentes, I

es finito, pues al eliminar cada vértice $y \in A_x$ pueden quedar como máximo $gr(y) - 1$ componentes distintas de $\{x\}$. Entonces $|I| \leqslant \sum_{y \in A_x}(gr(y) - 1)$, por otra parte, cada $\mathcal{C}_i$ es cerrado, y como $x \notin \mathcal{C}_i$, existe $V_i \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$ tal que $V_i \subset V(G) \setminus \mathcal{C}_i$. Si $W_i = \cap_{i \in I} V_i$, W_i es $\mathcal{T}$-abierto, y como $W \cap \mathcal{C}_i = \emptyset$ para todo $i \in I$, $W \subset \{x\} \cup A_x$, luego $\{x\} \cup A_x \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$.

■

Teorema 6.2.11. Si G es un grafo conexo localmente finito y $\mathcal{T}$ es una topología compatible sobre G, entonces $\mathcal{T}$ es una A-topología.

Demostración. Para cada $x \in V(G)$ la familia $\{N \cap (\{x\} \cup A_x)); N \in \mathcal{N}_x\}$ es una base de entornos de x con un número finito de elementos, pues tiene como máximo tantos conjuntos como $\mathcal{P}(\{x\} \cup A_x)$, por lo que la intersección de esos elementos es el entorno mínimo de x. ■

Nota 6.2.12. El recíproco del Teorema 6.2.11 no es cierto en general como se verá en el Ejemplo 6.2.18.

El siguiente resultado, que es fundamental para grafos localmente finitos, puede encontrarse más detalladamente en [9,10].

Teorema 6.2.13. Sea $G = (V, E)$ un grafo, las siguiente propiedades son equivalentes:

1. G admite una topología compatible $\mathcal{T}$.

2. G es un grafo de comparabilidad.

Demostración. Veamos que $1 \Longrightarrow 2$. Aplicando el Teorema 3.5.2 se obtiene una A-topología $\mathcal{AT}$ que tiene los mismos conexo binarios que $\mathcal{T}$ por la Proposición 6.2.8 la topología $\mathcal{AT}$ es compatible sobre G. Aplicando el Teorema 3.5.4 obtenemos una A-topología $T_0, \mathcal{A}_0$, que también es compatible pues tiene los mismos conexos que $\mathcal{AT}$, verificándose que $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{A}_0$.

Sea $\leqslant$ el orden de especialización sobre V. Esta relación es una relación de orden parcial por ser $\mathcal{A}_0$ una topología T_0. Veamos que G es un grafo de comparabilidad asociado a $\leqslant$. Si $\{x, y\} \in E$, entonces

$\{x, y\}$ es un conjunto conexo para $\mathcal{A}_0$, y por tanto, por el Lema 3.4.2 $y \in \overline{\{x\}}$ o $x \in \overline{\{y\}}$, es decir $x \leqslant y$ o $y \leqslant x$ respectivamente.

Recíprocamente si $x \leqslant y$, $y \in \overline{\{x\}}$, luego $\{x, y\}$ es un conjunto conexo para $\mathcal{A}_0$ y por lo tanto, también para $\mathcal{T}$, además $\{x, y\} \in E$. Si $y \leqslant x$ se razona del mismo modo.

Veamos ahora $2 \implies 1$. Sea $\leqslant$ un preorden en V verificando que $x \leqslant y$ o $y \leqslant x$ si y solo si $\{x, y\} \in E$. Este preorden puede ser asociado a una topología de Alexandroff $\mathcal{A}$ definida por, $\overline{\{x\}} = \{y \in V : x \leqslant y\}$. Luego por le Proposición 3.4.3 $\{x, y\}$ es un conjunto conexo para $\mathcal{A}$ si y solo si $y \in \overline{\{x\}}$ o $x \in \overline{\{y\}}$, por la definición de las clausuras esto equivale a que $y \leqslant x$ o $x \leqslant y$, lo que por hipótesis equivale a que $\{x, y\} \in E$. Para finalizar, basta tener en cuenta la Proposición 6.2.8. ■

La siguiente proposición relaciona las topologías compatibles y las A-topologías generadas.

Ejemplo 6.2.14.
Sea $\mathcal{T}$ una topología compatible sobre un grafo G, denotamos por $\mathcal{A}$ las topología de Alexandroff generada por $\mathcal{T}$ y por $\mathcal{A}_0$ la A-topología T_0 generada. Tenemos las siguientes propiedades.

1. $\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\sim}$ y $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0^{\sim}$ son compatibles. Sea $\mathcal{T}$ una topología compatible sobre $G = (V, E)$. Como $\mathcal{A}\mathcal{T}$ tiene los mismos conexos binarios que $\mathcal{T}$, por la Proposición 6.2.8 $\mathcal{A}$ también es compatible. Además, $\mathcal{A}_0$ la cual se obtiene aplicando el Teorema 3.5.4, también es compatible por tener los mismos subconjuntos conexos que $\mathcal{A}$. Por otra parte, como las topologías duales tienen los mismos conexos (por el Teorema 4.1.9), $\mathcal{A}^{\sim}$ y $\mathcal{A}_0^{\sim}$ son compatibles.

2. Por la Proposición 4.1.11 $\sup(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0^{\sim}) = \mathcal{D}$ (topología discreta), ya que $\mathcal{A}_0$ es un A-espacio T_0. Luego, esta topología sobre $V(G)$ no es compatible si G tiene al menos dos aristas, pues tendría al menos dos subconjuntos conexos binarios.

3. Si G es conexo, $(V(G), \mathcal{T})$ sería conexo, y por el apartado 1) lo serían $\mathcal{A}, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}^{\sim}$ y $\mathcal{A}_0^{\sim}$. Luego por la Proposición 4.1.11 $\inf(\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\sim}) =$

$\mathcal{T}_{\text{indiscreta}} = \mathrm{inf}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_0^{\sim})$. Pero si G es bipartito y $|E| \geqslant 3$, entonces existen tres vértices en G, x, y, z, tales que $G[\{x, y, z\}]$ no tiene aristas y por tanto no será conexo en $\mathcal{T}_{\text{indiscreta}}$.

Proposición 6.2.15. Si $\mathcal{T}$ es una A-topología T_0 compatible, es maximal en conjunto de las topologías compatibles.

Demostración. Es obvio gracias a la Proposición 3.5.8. ■

Como todo grafo bipartito es un grafo de comparabilidad, admite una topología compatible. En el siguiente resultado se obtendrán dichas topologías.

Teorema 6.2.16. Sea $G = (V_1, V_2; E)$ un grafo bipartito localmente finito , se tiene:

1. Si $|E| = 1$ existes tres topologías compatibles, $\mathcal{T}_{\text{ind}}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, V_1 \cup V_2, V_1\}$ y $\mathcal{T}^{\sim} = \{\emptyset, V_1 \cup V_2, V_2\}$.

2. Si $|E| \geqslant 2$ existes dos A-topologías compatibles:

   a) La topología $\mathcal{T}_1$ en la que los entornos mínimos $\mathcal{U}_x^{\sqcup_1} = \{x\}$ para $x \in V_1$ y $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}_1} = \{x\} \cup \{A_x\}$ para $x \in V_2$.

   b) La topología $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1^{\sim}$ en la que $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}_2} = \{x\}$ para $x \in V_2$ y $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}_2} = \{x\} \cup \{A_x\}$ para $x \in V_1$.

Demostración.

1. Si $\{x, y\}$ es la única arista de G, entonces $V_1 = \{x\}$ y $V_2 = \{y\}$. De las cuatro topologías sobre $\{x, y\}$, solo las indicadas pueden ser compatibles, pues $(\{x, y\}, \mathcal{T}_{\text{dis}})$ no es conexo.

2. Comprobemos solo que $\mathcal{T}$ es compatible, pues que $\mathcal{T}^{\sim}$ lo es se demuestra del mismo modo. Por la Proposición 6.2.8, basta comprobar que si $\{x, y\} \in E$ entonces $\{x, y\}$ es $\mathcal{T}$ es conexo. Pero $\{x, y\} \in E$ si y solo si $x \in V_1$ e $y \in V_2$, y por tanto $\mathcal{U}_x \cap \{x, y\} = \{x\}$ y $\mathcal{U}_y \cap \{x, y\} = \{x, y\}$, luego $\{x, y\}$ no admite ninguna partición por abiertos disjuntos.

Por otra parte, si $\mathcal{T}$ es una topología compatible sobre G, $\mathcal{T}$ es una A-topología, y si $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}}$ es el entorno mínimo de x en $\mathcal{T}$, por el Teorema 6.2.10 $\{x\} \cup A_x \in \mathcal{N}_x^{\mathcal{T}}$, luego $\{x\} \subset \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} \subset \{x\} \cup A_x$.

Veamos que para todo $x \in V_1 \cup V_2$, se cumple que $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} = \{x\}$ o $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} \cup A_x$. En efecto, supongamos que $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} \neq \{x\}$ y que existe $y \in A_x \setminus \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}}$. Por ser G bipartito, ha de ser $A_x \cap A_y = \emptyset$. Pero como $\{x, y\} \in E$, $\{x, y\}$ es $\mathcal{T}$-conexo y entonces ha de ser $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} \cap \mathcal{U}_y^{\mathcal{T}} = \emptyset$. Puesto que $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} \cap \mathcal{U}_y^{\mathcal{T}} \subset \{x, y\}$, ha de ser $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} \subset \mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} \cap \mathcal{U}_y^{\mathcal{T}} = \{x\}$, contradicción con que se ha supuesto que $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} = \{x\}$.

Por último, comprobemos que si $x \in V_1$ y $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} = \{x\}$ entonces $\mathcal{U}_y^{\mathcal{T}} = \{y\}$ para todos los vértices $y \in V_1$, y solo para ellos se cumple que $\mathcal{U}_y^{\mathcal{T}} = \{y\}$. Por ser G conexo y $|E| \geqslant 2$ existe un camino (arco) $x = z_1 z_2 \cdots z_n = y$ de forma que los vértices intermedios está alternativamente en V_1 y V_2, por lo que podemos reducirnos al caso en que el camino sea xzy. Pero $\mathcal{U}_z^{\mathcal{T}} \neq \{z\}$, ya que, al ser $z \in A_x$, $\{x, y\}$ es $\mathcal{T}$ conexo. Por tanto, $\mathcal{U}_z^{\mathcal{T}} = \{z\} \cup A_z$, y si $\mathcal{U}_y^{\mathcal{T}} = \{y\} \cup A_y$, será $\mathcal{U}_z^{\mathcal{T}} \cap \mathcal{U}_y^{\mathcal{T}} = \{y, z\}$. Pero entonces necesariamente $A_y = \{z\}$ y $A_z = \{y\}$, contradicción con ser $x \in A_z$.

Se llega así a que si $x, y \in V$, $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} = \mathcal{U}_y^{\mathcal{T}}$ si y solo si $x, y \in V_1$ o $x, y \in V_2$ Por tanto $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1$ si existe $x \in V_1$ con $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} = \{x\}$ o $\mathcal{T} = \mathcal{T}_2$ si $x \in V_2$ con $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} = \{x\}$.

■

Nota 6.2.17. Obsérvese que si G es bipartito y conexo, las dos únicas orientaciones posibles de sus aristas, es decir, las dos únicas relaciones de orden parcial en el conjunto de sus vértices son las indicadas en las siguientes figuras

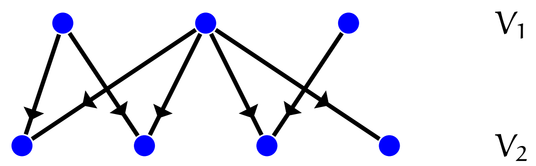


Figura 6.7: *Orden descendente*

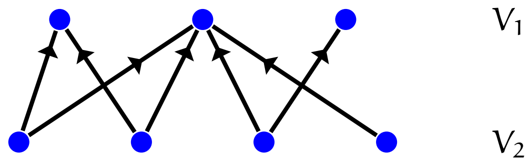


Figura 6.8: *Orden ascendente*

Esto es así porque si en un vértice de V_1, por ejemplo hubiese una flecha entrante y otra saliente, habría una arista entre dos vértices de V_2.

Si se da la situación de la Figura 6.2.17, la A-topología $\mathcal{T}$ cuyo orden de especialización es el representado, verificaría que $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}}$ si $x \in V_1$ y $\mathcal{U}_x^{\mathcal{T}} = \{x\}$ si $x \in V_2$. Es decir, $\mathcal{T}$ sería la $\mathcal{T}_2$ del enunciado anterior.

No es necesario que un grafo sea localmente finito para la existencia de una topología compatible en el conjunto de sus vértices, como se comprueba en los siguientes ejemplos

Ejemplo 6.2.18.
Sea G el grafo bipartito (grafo estrella) $G = (V, E)$, donde $V = V_1 \cup V_2$ siendo $V_1 = \mathbb{Q}$ y $V_2 = \{*\}$, con $* \notin \mathbb{Q}$. Se puede representar G en $\mathbb{R}^2$, tomando $V_1 = \mathbb{Q} \times \{0\}$ y $* = (0, 1)$. Sea $\mathcal{T}_*$ la A-topología punto $*$ incluido, es decir

$$\mathcal{T}_* = \{\emptyset\} \cup \{O \subseteq V;\ * \in O\}.$$

En esta A-topología, se tiene que $\mathcal{U}_*^{\mathcal{T}_*} = \{*\}$ y $\mathcal{U}_q^{\mathcal{T}_*} = \{*, q\}$. Por tanto $\overline{\{*\}} = V$ y $\overline{\{q\}} = \{q\}$, y $\mathcal{T}_*$ es T_0.

Obsérvese que $(V, \mathcal{T}_*)$ es conexo. Más aún, $C \subset V$ es $\mathcal{T}_*-$conexo si y solo $* \in C$, pues si $* \in C$, dos abiertos propios de $\mathcal{T}_*|_C$ se cortan, y si $* \notin C$, $\mathcal{T}_*|_C$ es la topología discreta. Por tanto $\mathcal{T}_*$ es una topología compatible sobre V, ya que dado $S \subset V$, con $|S| \geqslant 2$ $G[S]$ es conexo si y solo si $* \in S$.

La topología $\mathcal{T}_*^{\sim}$ es la topología punto $*$ excluido, es decir

$$\mathcal{T}_*^{\sim} = \{V\} \cup \{O \subset V;\ O \subset \mathbb{Q}\}.$$

Y es también una topología compatible sobre V. Se tiene que $\sup(\mathcal{T}_*, \mathcal{T}_*^{\sim}) = \mathcal{T}_{\mathsf{dis}}$ e $\inf(\mathcal{T}_*, \mathcal{T}_*^{\sim}) = \mathcal{T}_{\mathsf{ind}}$.

Podemos construir otras dos topologías teniendo los mismos conjuntos conexos con dos elementos. Sea $\mathcal{T}$ una topología compatible (no necesariamente de Alexandroff) en V.

Para esta topología el subespacio $\mathbb{Q}$ es totalmente disconexo. En efecto, si $A \subseteq \mathbb{Q}$ es conexo para la topología inducida sobre $\mathbb{Q}$, A es conexo para la topología $\mathcal{T}$ sobre V. Pero $* \notin A$, así el cardinal de A es menor o igual que uno.

Si $\mathcal{T}$ es totalmente disconexa sobre $\mathbb{Q}$. Podemos encontrar dos topologías asociadas con $\mathcal{T}$.

1. La primera topología $\mathcal{T}_1^*$, donde los abiertos de esta topología son $\{\emptyset\} \cup \{U \cup \{*\}$, U es un abierto de $\mathcal{T}\}$.

2. La segunda topología $\mathcal{T}_2^*$, donde sus abiertos están definidos de la siguiente forma, $\{V\} \cup \{U$, U son abiertos de $\mathcal{T}\}$ (Estas topologías no tienen que ser de Alexandroff).

Tenemos múltiples opciones para $\mathcal{T}$, por ejemplo, podemos tomar la topología discreta $\mathcal{D}$, o la topología $\mathcal{T}_+$ en la cual una base de abiertos viene dada por $[x, y)$,$x, y \in \mathbb{Q}$, o la topología $\mathcal{T}_-$, cuya base de abiertos viene dada por $(x, y]$, $x, y \in \mathbb{Q}$, o la topología usual $\mathcal{T}_0$ sobre $\mathbb{Q}$ (asociada a la distancia usual sobre $\mathbb{Q}$), o la topología p-adic (asociada con la distancia p-adic sobre $\mathbb{Q}$), etc...

Bibliografía

[1] Engelking, R. (1989) *General Topology. Revised and completed edition.* Sigma series in pure mathematics; Vol.6.

[2] Munkres, J.R. (2 Ed.) (2000) *Topology.* Prentice Hall, Upper Saddle River.

[3] Speer, T. (2007) *A Short Study of Alexandroff Spaces.* arXiv:0708.2136.

[4] Rubiano, G. (3 Ed.) (2010) *Topología General.* Universidad Nacional de Colombia.

[5] Bourbaki, N. (1966) *Elements of Mathematics: General Topology.* Hermann, Éditeurs des Sciences et des Arts.

[6] Willard, S. (1970) *General Topology.* Addison-Wesley, Series in Mathematics.

[7] Alexandroff, P. (1937) *Diskrete Räume.* Moscú, Rusia: Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. Vol. 2 (44), Number 3, 501-519.

[8] Lipschutz, S. (1965) *Theory and Problems of General Topology.* Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company.

[9] Préa, P. (1992) *Graphs and Topologies on Discrete Sets.* Discrete Mathematics 103, 189-197

[10] Neumann-Lara, V. Wilson, R.G. (1995) *Compatible Connectedness in Graphs and Topological Spaces.* Order 12, Kluwer Academic Publishers, 77-90.

[11] May, J.P. (2003) *Finite Topological Spaces.* Notes for REU.

[12] Arenas, F.G. (1999) *Alexandroff Spaces.* Acta Math. Univ. Comenianae, Vol. LXVIII, 1, 17-25.

[13] Stong, R.E (1966) *Finite Topological Spaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 123, 325-340.

[14] Dugundji, J. (1978) *Topology.* Irving Kaplansky, Allyn and Bacon, Series in Advanced Mathematics.

[15] Kilicman, A. Abdulkalek, H. (2018) *Topological Spaces Associated With Simple Graphs.* Journal og Mathematical Analysis, Vol. 9 Issue 4, 44-52.

[16] Henry Sharp, JR. (1968) *Cardinality on Finite Topologies.* Journal of Combinatorial Theory 5, 82-86.

[17] Cuevas Rozo, J.L. Sarria Zapata, H. (2017) *Computation of Matrices and Submodular Functions Values Associated to Finite Topological Spaces.* Rev. Acad. Colomb. Cienc. Ex. Fis. Nat. 41(158), 127-136.

[18] Krishnamurthy, V. (1966) *On the Number of Topologies on Finite Sets.* Amer. Math. Montly 73, 154-157.

[19] Shiraki, M. (1968) *On Finite Topological Spaces.* Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ, 1, 1-8.

[20] Bretto, A. (2007). *Digital Topologies on Graphs.* En *Applied Graph Theory in Computer Vision and Pattern Recognition*, 65-82. Springer, Berlin.

[21] Guma, T. (2014). *Finite Topological Spaces with Maple* (Master Tesis). Universidad de Benghazi, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas.

[22] Al-badry, A.E.H. (2011). *On Alexandroff Space with Application in Computer Sciences* (Master Tesis). Universidad de Kufa, Colegio de Matemáticas y Ciencias de la Computación, Iraq.

[23] Rubiano, G.N. (2006). *Sobre el Número de Topologías en un Conjunto Finito.* Boletín de Matemáticas, Nueva Serie, Volumen XIII No. 2, 136-158.

[24] Jafarian Amiri, S.M., Jafarzadesh, A., Khatibzadeh, H. (2013). *An Alexandroff Topology on Graphs.* Boletín de la Sociedad Iraní de Matemáticas, Vol. 39 No. 4, 647-662.

[25] Gutiérrez, T., García, J.M. (2017). *Espacios Topológicos Finitos* (Trabajo Fin de Grado). Universidad de La Laguna, Facultad de Ciencias.

[26] Kukiela, M. (2010). *On Homotopy types of Alexandroff Spaces.* Order 27, 1,9-21.

[27] Gallai, T. (1967). *Transitiv Orientierbare Graphen.* Acta Math. Acad. Sci. Humgar. 18, 25-66.

[28] Neumann-Lara, V., Wilson, R. G. (1995). *Compatible connectedness in graphs and topological spaces.* Order 12(1), 77-90.

[29] Marijuan, C. (2010). *Finite topology and digraphs.* Proyecciones 29, 291–307.

[30] Bretto, A. (2001). *Comparability Graphs and Digital Topology.* Computer Vision and Image Understanding 82, 33-41.

[31] Bretto, A., Faisant, A., Vallée, T. (2006). *Compatible Topology on Graph: An application to graph isomorphism problem complexity.* Theorical Computer Science, 362, 255-272.